6. Espace-temps stationnaire et mouvement permanent d'un fluide parfait chargé.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

les variétés V_3^M peuvent être engendrées par les bandes de $\overline{V}_4$ définies par les géodésiques de longueur nulle $\overline{L}_0$, le 3-plan élémentaire associé étant le plan tangent au cône élémentaire $\overline{C}_x$ le long de la tangente à $\overline{L}_0$.

Nous avons démontré le théorème

THÉORÈME. — *Les bicaractéristiques des équations de* MAXWELL *sont les géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne* $\overline{V}_4$ *munie de la métrique associée*

$$d\overline{s}^2 = \overline{g}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta\, .$$

Dans le langage de la théorie de la propagation par ondes, les variétés caractéristiques V_3^M jouent le rôle de surfaces d'ondes électromagnétiques. Les bicaractéristiques $\overline{L}_0$ sont les rayons électromagnétiques associés. En introduisant l'indice de réfraction $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ du milieu, nous pouvons donc énoncer le résultat suivant

THÉORÈME. — *Dans un milieu transparent isotrope d'indice de réfraction* n *variable, les rayons électromagnétiques sont des géodésiques de longueur nulle de l'espace riemannien* $\overline{V}_4$ *muni de la métrique*

$$d\overline{s}^2 = \overline{g}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = \left(g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) u_\alpha\, u_\beta\right) dx^\alpha\, dx^\beta$$

où $g_{\alpha\beta}$ *est le tenseur métrique fondamental et* u_α *le vecteur vitesse unitaire d'univers définis en chaque point du milieu considéré.*

III. ETUDE GÉOMÉTRIQUE DES RAYONS ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS L'ESPACE

6. Espace-temps stationnaire et mouvement permanent d'un fluide parfait chargé.

On dit que l'espace-temps V_4 est *stationnaire* dans un domaine D_4 si la variété riemannienne définie par D_4 muni de la métrique d'univers ds^2 admet un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales à trajectoires z orientées dans le temps, ne laissant invariant aucun point de D_4, la famille des lignes z ou lignes de temps satisfaisant aux hypothèses suivantes:

a) les lignes de temps sont homéomorphes à la droite réelle R;

b) on peut trouver une variété différentiable à trois dimensions D_3, satisfaisant aux mêmes hypothèses de différentiabilité que V_4, telle qu'il existe un homéomorphisme de même classe de la variété D_4 sur le produit topologique $D_3 \times R$ dans lequel les z s'appliquent sur les droites facteurs. La variété quotient D_3 sera dite simplement *espace.*

On peut définir dans D_4 des systèmes de coordonnées locales (x^0, x^i), dits adaptés au caractère stationnaire, de la manière suivante. Les (x^i) sont un système de coordonnées locales arbitraire de D_3. La donnée des (x^i) détermine une ligne de temps. Pour déterminer un point sur cette ligne, on se donne la variété $x^0 = \text{const.}$ à laquelle il appartient, ces variétés étant homéomorphes à D_3. Les potentiels $g_{\alpha\beta}$ relatifs aux coordonnées adaptées sont indépendants de la variable x^0 et le vecteur $\vec{\xi}$ générateur infinitésimal du groupe d'isométries admet pour composantes contravariantes

$$\xi^0 = 1 \qquad \xi^i = 0$$

et a pour carré $\xi^2 = g_{00} > 0$.

Dans la suite on n'introduit que des systèmes de coordonnées adaptés. En effectuant la décomposition en carrés de la forme quadratique fondamentale

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \tag{6.1}$$

à partir de la variable directrice dx^0, nous obtenons

$$ds^2 = \frac{1}{g_{00}} \left(g_{0\alpha}\, dx^\alpha\right)^2 + d\hat{s}^2 \tag{6.2}$$

où

$$d\hat{s}^2 = \hat{g}_{ij}\, dx^i\, dx^j \equiv \left(g_{ij} - \frac{g_{0i}\, g_{0j}}{g_{00}}\right) dx^i\, dx^j \tag{6.3}$$

définit sur D_3 une métrique riemannienne définie négative.

Considérons maintenant un fluide parfait chargé conducteur en mouvement dans un domaine D_4. Le mouvement de ce fluide est dit *permanent* si l'espace-temps associé V_4 est stationnaire dans D_4 et si le groupe d'isométries laisse invariantes les quantités $(g_{\alpha\beta}, H_{\alpha\beta}, G_{\alpha\beta}, \theta, q_\alpha, u^\alpha, p, \delta)$. On démontre immédiatement à partir des résultats sur le problème de Cauchy que pour que le mouvement du fluide soit permanent, il faut et il suffit que l'espace-temps riemannien associé soit stationnaire dans D_4 et que son groupe d'isométries laisse invariants les champs $H_{\alpha\beta}$, θ ainsi que les coefficients $\varkappa$, c, l, ε, μ, σ.

Si le mouvement du fluide est permanent, les quantités

$$\overline{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) u_\alpha u_\beta$$

sont constantes le long des lignes de temps. Il en résulte que la variété riemannienne $\overline{V}_4$ définie par la variété différentiable portant D_4 et munie de la métrique associée, admet aussi un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales ne laissant invariant aucun point de $\overline{V}_4$, induit par celui de l'espace-temps. Il est clair que les (x^0, x^i) constituent un système de coordonnées locales adapté pour $\overline{V}_4$. On peut prendre pour générateur infinitésimal du groupe d'isométries de $\overline{V}_4$ le vecteur $\vec{\zeta}$ qui a pour composantes contravariantes $\zeta^\alpha = \xi^\alpha$. Le carré de ce vecteur a pour valeur dans $\overline{V}_4$

$$(\vec{\zeta})^2 = \overline{g}_{00} = g_{00} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)(u_0)^2 .$$

Cette quantité pouvant être positive, négative ou nulle, les trajectoires d'isométries de $\overline{V}_4$ peuvent être orientées dans le temps, dans l'espace ou être isotropes.

7. Un problème du calcul des variations.

Nous nous proposons d'interpréter géométriquement les rayons électromagnétiques dans l'espace à trois dimensions. A cet effet, nous commençons par rappeler brièvement un problème du calcul des variations.