

V. Enoncé du résultat obtenu.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **1 (1955)**

Heft 1-2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Or, en vertu de (IV, 5), on obtient

$$\varphi'_+(\nu) \geq \Psi_0^{-\mu} \int_{\nu-1}^{\nu} \varphi'_+(x) dx,$$

et la divergence de la série (II, 4) résulte de celle de l'intégrale (IV, 1). D'autre part on a, en vertu de (IV, 6),

$$\frac{\varphi'_+(\nu)}{\varphi(\nu)^2} \leq \frac{\Psi_0^{\mu} \varphi'_+(x)}{(\varphi(x) - \mu - 1)^2} \quad (\nu \leq x \leq \nu + 1),$$

dès que $\varphi(x) \geq 2\mu + 2$, donc

$$\frac{\varphi'_+(\nu)}{\varphi(\nu)^2} \leq 4 \Psi_0^{\mu} \frac{\varphi'_+(x)}{\varphi(x)^2} \quad (\nu \leq x \leq \nu + 1, \quad \varphi(x) \geq 2\mu + 2),$$

$$\frac{\varphi'_+(\nu)}{\varphi(\nu)^2} \leq 4 \Psi_0^{\mu} \int_{\nu}^{\nu+1} \frac{\varphi'_+(x)}{\varphi(x)^2} dx \quad (\varphi(\nu) \geq 2\mu + 2),$$

et la convergence de la série (II, 5) résulte de celle de l'intégrale (IV, 2).

V. Énoncé du résultat obtenu.

En rassemblant nos résultats nous avons le théorème suivant:

C. Soit $\Psi(x)$ une fonction de x continue, possédant une dérivée positive et continue pour $x \geq a_0$ et telle que l'on ait

$$\Psi(x) > x \quad (x \geq a_0).$$

Supposons que $\Psi'(x)$ satisfait à l'une des deux conditions suivantes: ou bien $\Psi'(x)$ ne décroît pas à partir d'un x et atteint ou dépasse la valeur un: ou bien $\Psi'(x)$ ne croît pas à partir d'un x . Alors:

a) Si $f(x)$ est positive à partir d'un x et est sommable tandis que $\frac{1}{f(x)}$ reste uniformément borné dans chaque sous-intervalle fini de l'intervalle de définition de $f(x)$ et si l'on a à partir d'un x

$$\frac{f(\Psi(x)) \Psi'(x)}{f(x)} \geq 1,$$

la série

$$\sum_{\nu}^{\infty} f(\nu)$$

est divergente.

- b) Si $f(x)$ est mesurable et positive à partir d'un x et reste uniformément borné dans chaque sous-intervalle fini de l'intervalle de définition de $f(x)$ et s'il existe un nombre δ , $0 < \delta < 1$, tel qu'à partir d'un x ,

$$\frac{f(\Psi(x)) \Psi'(x)}{f(x)} \leq \delta, \quad 0 < \delta < 1,$$

la série

$$\sum_{\nu}^{\infty} f(\nu)$$

est convergente.

VI. Le critère B d'Ermakof et les critères de première espèce.

Quelle est la portée du critère B d'Ermakof comparée à celle des critères connus ? On trouve souvent l'assertion que le critère B d'Ermakof (avec $\Psi(x) = e^x$) « embrasse » tous les critères de la série logarithmique de MORGAN-BERTRAND. Or ceci n'est vrai qu'en partie.

Si l'on considère les critères de première espèce dans lesquels a_{ν} est comparé avec différentes fonctions de l'index ν , le critère B d'Ermakof n'est pas même plus efficace que le critère de Cauchy portant sur $\sqrt[\nu]{a_{\nu}}$.

En effet, nous allons construire une fonction $f(x)$ positive, continue, non croissante et tendant vers 0 avec $x \rightarrow \infty$, telle que l'on a

$$f(x) \leq e^{-x} \quad (x \geq 1), \quad (\text{VI}, 1)$$

$$\frac{f(e^{x_{\nu}}) e^{x_{\nu}}}{f(x_{\nu})} \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty) \quad (\text{VI}, 2)$$

pour une suite x_{ν} tendant vers l'infini. Alors la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} f(\nu)$ est