III. Construction d'une solution de l'équation d'Abel.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **1 (1955)**

Heft 1-2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

vertu de (II, 18), la relation (II, 19) est aussi valable pour tout $x \geqq a_0$ et l'on a

$$f(x) \leqq C \frac{\varphi'_+(x)}{\varphi(x)^2} \qquad (x \geqq a_0) \cdot$$

La série (II, 7) est convergente avec (II, 5).

Les assertions *a*) et *b*) sont complètement démontrées.

III. Construction d'une solution de l'équation d'Abel.

Dans cette section nous allons construire avec Ermakof, pour chaque fonction $\Psi(x)$ satisfaisant aux conditions du lemme de la section II une fonction $\varphi(x)$ jouissant des propriétés exigées dans ce lemme, sauf, pour le moment, les propriétés γ) et δ).

Désignons l'inverse de la fonction $y = \Psi(x)$ $(x \geqq a_0)$ par

$$x = \psi(y) \qquad (y \geqq a_1 = \Psi(a_0)) \, .$$

La fonction $\psi(y)$ est continue et croissante pour $y \geqq a_1$, et l'on a

$$\psi'(y) = \frac{1}{\Psi'(x)} \qquad (y = \Psi(x) \, , \quad x \geqq a_0 \, , \quad y \geqq a_1) \, . \tag{III, 1}$$

Posons

$$\psi_0(x) = x \, , \quad \psi_1(x) = \psi(x) \, , \quad \psi_2(x) = \psi(\psi(x)) \, , \quad \dots , \\ \psi_n(x) = \psi(\psi_{n-1}(x)) \, .$$

Alors $\psi_n(x)$ est l'inverse de la fonction $\Psi_n(x)$ donnée par (II, 9). Donc, en résolvant (II, 11) par rapport à x^*, on a

$$x^* = \psi_n(x) \, . \tag{III, 2}$$

La valeur de x donnée par (II, 11) parcourt évidemment l'intervalle

$$a_n \leqq x < a_{n+1} \, , \tag{III, 3}$$

où les a_ν sont définies par (II, 10).

Donc, dès qu'un $x \geqq a_0$ est donné, l'entier n et le nombre x^* dans l'intervalle $\langle a_0, a_1 \rangle$ sont univoquement déterminés par la relation (II, 11).

Posons maintenant

$$\varphi(x) = n + 1 + \frac{x^* - a_0}{a_1 - a_0} \qquad (x \geqq a_0) , \tag{III, 4}$$

où l'entier n est déterminé par (III, 3) et x^* par (III, 2). Il résulte de (II, 11)

$$\Psi(x) = \Psi_{n+1}(x^*) ,$$

donc

$$\varphi(\Psi(x)) = n + 2 + \frac{x^* - a_0}{a_1 - a_0} = \varphi(x) + 1 .$$

La fonction $\varphi(x)$ donnée par (III, 4) satisfait donc à l'équation d'Abel.

D'autre part, si x tend vers ∞, le nombre n déterminé par (III, 3) tend aussi vers ∞. Donc, $\frac{x^* - a_0}{a_1 - a_0}$ étant situé dans l'intervalle $\langle 0, 1 \rangle$, on a $\varphi(x) \longrightarrow \infty$ $(x \longrightarrow \infty)$.

La fonction $\psi_n(x)$ est continue pour tout entier n. Donc, tant que x reste dans l'intervalle (III, 3), x^* et $\varphi(x)$ sont continus.

On a évidemment pour tout $n \geqq 0$

$$\varphi(a_n) = n + 1 .$$

Donc $\varphi(x)$ est positive et continue pour $x > a_0$ autant que x est différente de chaque a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$. $\varphi(x)$ est, de plus, *continue de droite* en tout point a_n $(n = 0, 1, \ldots)$.

Je dis que $\varphi(x)$ est aussi continue de gauche en chaque point a_{n+1} $(n = 0, 1, \ldots)$. En effet, si x tend *en croissant* vers l'extrémité de droite de l'intervalle (III, 3), x^* tend vers a_1, et d'après (III, 4) $\varphi(x)$ tend vers $n + 2 = \varphi(a_{n+1})$. Donc $\varphi(x)$ *est continue pour tout* $x \geqq a_0$.

Il résulte, en plus, de (III, 4) et (III, 2) que $\varphi(x)$ est dérivable à l'intérieur de tout intervalle (III, 3), c'est-à-dire pour $a_n < x < a_{n+1}$. On a évidemment

$$\varphi'(x) = \frac{1}{a_1 - a_0} \; \frac{d\,\psi_n(x)}{dx} ,$$

$$(a_1 - a_0)\, \varphi'(x) = \psi'(\psi_{n-1}(x))\, \psi'(\psi_{n-2}(x)) \ldots \psi'(\psi(x))\, \psi'(x)$$
$$(a_n < x < a_{n+1}) \,. \tag{III, 5}$$

La même expression donne encore la *dérivée de droite* de $\varphi(x)$ en a_ν, de sorte que $\varphi'_+(x)$ *est continue dans l'intervalle* (III, 3).

On a en particulier

$$(a_1 - a_0)\, \varphi'_+(a_0) = 1 \,, \quad (a_1 - a_0)\, \varphi'_+(a_1) = \psi'(a_1) \,, \quad \ldots$$

$$(a_1 - a_0)\, \varphi'_+(a_n) = \psi'(a_n)\, \psi'(a_{n-1}) \ldots \psi'(a_1) \quad (n = 1, 2, \ldots) \,. \tag{III, 6}$$

Pour l'extrémité de droite de l'intervalle (III, 3), l'expression (III, 5) tend avec $x \uparrow a_{n+1}$ vers

$$\frac{d\psi_n(a_{n+1})}{dx} = \psi'(a_{n+1})\, \psi'(a_n) \ldots \psi'(a_2) \,.$$

Or, ceci est aussi

$$(a_1 - a_0)\, \varphi'_-(a_{n+1}) \,,$$

où $\varphi'_-(a_{n+1})$ est la *dérivée de gauche* de $\varphi(x)$ en a_{n+1}. En effet, on a

$$(a_1 - a_0)\, \varphi'_-(a_{n+1}) = \lim_{x \uparrow a_{n+1}} \frac{(a_1 - a_0)(n+2) - [(n+1)(a_1 - a_0) + \psi_n(x) - a_0]}{a_{n+1} - x} =$$

$$= \lim_{x \uparrow a_{n+1}} \frac{a_1 - \psi_n(x)}{a_{n+1} - x} = \lim_{x \uparrow a_{n+1}} \frac{\psi_n(a_{n+1}) - \psi_n(x)}{a_{n+1} - x} = \frac{d\psi_n(a_{n+1})}{dx} \,.$$

On a donc en particulier

$$(a_1\ a_0)\, \varphi'_-(a_n) = \psi'(a_n)\, \psi'(a_{n-1}) \ldots \psi'(a_2) \qquad (n > 0)$$

où le second membre a la valeur *un* pour $n = 1$. Donc, en comparant avec (III, 6),

$$\varphi'_+(a_n) = \psi'(a_1)\, \varphi'_-(a_n) \,, \quad \varphi'_-(a_n) = \Psi'(a_0)\, \varphi'_+(a_n) \,. \tag{III ,7}$$

On voit que $\varphi'(x)$ est continue à l'intérieur de chacun des intervalles $\langle a_n, a_{n+1} \rangle$, à condition de prendre aux extrémités les dérivées du côté correspondant. Au point de discontinuité a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ on a (III, 7). Il résulte maintenant de l'hypothèse de la continuité de $\Psi'(x)$ que la propriété β) est satisfaite.