Courbes analogues aux géodésiques.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1939-1940)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

ces courbes comprennent les cercles et les spirales logarithmiques

$$\frac{r}{\varpi} = \text{const.}$$

Courbes analogues aux géodésiques.

2. — Considérons maintenant l'équation différentielle

$$\begin{vmatrix} x'' & y'' & z'' \\ x' & y' & z' \\ x & y & -z \end{vmatrix} = 0 \ , \tag{2}$$

définissant les courbes (C) caractérisées par la propriété suivante: *le plan osculateur au point courant* M *est constamment parallèle* à la droite OM, symétrique de OM par rapport au plan Oxy de coordonnées.

L'équation ci-dessus où les dérivées sont prises par rapport à une variable t quelconque est susceptible de prendre diverses formes par choix convenable de variable.

La variable étant l'azimut polaire θ

$$x = r\cos\theta \ , \qquad y = r\sin\theta \ ,$$

l'équation prend la forme

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} - 2\frac{r'}{r}\frac{dz}{d\theta} + \frac{rr'' - 2r'^2 - r^2}{r^2} z = 0 \ . \tag{3}$$

Si la fonction $r(\theta)$ de dérivées r' et r'' est donnée, la question est de déterminer celles des courbes (C) situées sur un cylindre donné parallèle à l'axe Oz; elle dépend d'une équation linéaire, homogène du second ordre en z.

En introduisant la fonction

$$u = \frac{1}{r} \ ,$$

l'équation se met sous une forme plus simple:

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + 2\frac{u'}{u}\frac{dz}{d\theta} - \frac{u + u''}{u} z = 0 \ . \tag{4}$$

En prenant r pour variable, mais r' et r'' désignant toujours les dérivées de r relativement à θ, l'équation est la suivante:

$$r'^2 \frac{d^2 z}{dr^2} + \left(r'' - 2\frac{r'^2}{r}\right)\frac{dz}{dr} + \frac{rr'' - 2r'^2 - r^2}{r^2} z = 0 \ . \qquad (5)$$

$$u'^2 \frac{d^2 z}{dr^2} + u^2 u'' \frac{dz}{dr} + u^3 (u + u'') z = 0 \ . \qquad (6)$$

Ces équations s'appliqueront à la détermination des courbes considérées situées sur les surfaces

$$z = r^n \ .$$

En posant

$$\left(\frac{r'}{r}\right)^2 = \omega$$

l'équation linéaire

$$\frac{n+1}{2} r \cdot \frac{d\rho}{dr} + (n^2 - 2n - 1)\rho = 1$$

aura l'intégrale:

$$\rho = \frac{1}{n^2 - 2n + 1} + \mathrm{A} r^{2\frac{1+2n-n^2}{n+1}} \ ;$$

d'où $\theta\,(z)$ par quadrature.

3. — La courbe (C) peut aussi être représentée au moyen de son plan osculateur

$$x \cos t + y \sin t + \mu z = \mathrm{H} \ ;$$

μ et H sont deux fonctions arbitraires de t. Le point d'osculation M de ce plan a pour cote

$$z = \frac{\mathrm{H} + \mathrm{H}''}{\mu + \mu''}$$

H'' et μ'' désignant les dérivées secondes de H et μ en fonction de t. La condition de parallélisme du plan osculateur avec la droite de direction $(x, y, -z)$ est

$$x \cos t + y \sin t - z = 0 \; .$$

$$2 \mu z = \mathrm{H} \; ,$$

$$2 \mu (\mathrm{H} + \mathrm{H}'') = \mathrm{H} (\mu + \mu'') \; .$$

$$\frac{\mu''}{\mu} = 1 + 2 \frac{\mathrm{H}''}{\mathrm{H}} \cdot \tag{7}$$

c'est une équation

$$\mathrm{Y}'' = f(\mathrm{X}) \cdot \mathrm{Y}$$

lorsque l'une ou l'autre des fonctions μ ou H est imposée, l'autre restant l'inconnue.

On peut encore se donner une fonction T arbitraire de t et déterminer les intégrales des deux équations indépendantes l'une de l'autre

$$\mathrm{H}'' = \mathrm{T} \cdot \mathrm{H} \; ; \qquad \mu'' = (2\mathrm{T} + 1) \mu \; .$$

4. — Si la courbe projetée sur Oxy est représentée en coordonnées polaires tangentielles

$$\begin{aligned}
x \cos \varphi + y \sin \varphi &= \varpi \\
- x \sin \varphi + y \cos \varphi &= \varpi' \\
x' \cos \varphi + y' \sin \varphi &= 0 \\
- x' \sin \varphi + y' \cos \varphi &= \mathrm{R} \\
x'' \cos \varphi + y'' \sin \varphi &= - \mathrm{R} \\
- x'' \sin \varphi + y'' \cos \varphi &= \mathrm{R}'
\end{aligned}$$

où R désigne l'expression algébrique

$$\mathrm{R} = \varpi + \varpi''$$

du rayon de courbure et R′ sa dérivée en φ, l'équation différentielle est

$$\begin{vmatrix} -\mathrm{R} & \mathrm{R}' & z'' \\ 0 & \mathrm{R} & z' \\ \varpi & \varpi' & -z \end{vmatrix} = 0$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^2 z}{d \varphi^2} - \frac{d \operatorname{Log} (\varpi \mathrm{R})}{d \varphi} \cdot \frac{dz}{d \varphi} - \frac{\mathrm{R}}{\varpi} z = 0 \; . \tag{8}$$

5. — Ainsi l'équation générale des courbes (C) a été ramenée à diverses formes d'équations linéaires et homogènes du second ordre. Mais le choix de la variable aréolaire lui donnera la forme la plus expressive.

Les coordonnées x et y d'une courbe *quelconque* du plan Oxy satisfaisant aux identités (1)

$$\frac{d^2x}{d\sigma^2} + \frac{4x}{R\varpi^3} = 0 ,$$

$$\frac{d^2y}{d\sigma^2} + \frac{4y}{R\varpi^3} = 0 ,$$

l'équation des courbes (C) sera donc

$$\frac{d^2 z}{d\sigma^2} = \frac{4z}{R\varpi^3} ; \tag{9}$$

c'est-à-dire l'équation dérivant de (1) par le changement de variable σ en $i\sigma$.

La détermination des courbes (C) connaissant leurs projections sur Oxy s'effectue donc en exprimant x et y en fonction de la variable aréolaire σ. La solution générale est

$$z = Ax(i\sigma) + By(i\sigma) .$$

(A et B constantes arbitraires).

6. — Par exemple, au cercle

$$x = \cos\theta , \qquad y = \sin\theta , \qquad \theta = 2\sigma ,$$

sera associée:

$$z = A\,\mathrm{ch}\,\theta + B\,\mathrm{sh}\,\theta .$$

A l'hyperbole $x = \mathrm{ch}\,u$, $y = \mathrm{sh}\,u$, $u = 2\sigma$, sera associée:

$$z = A\cos u + B\sin u .$$

A la spirale hyperbolique $r\theta = 1$,

$$2\sigma = r_0 - r \; ,$$

on associera:

$$z = \frac{a \operatorname{ch} \theta + b \operatorname{sh} \theta}{\theta} \; .$$

7. — Dans le cas de l'hyperboloïde de révolution

$$z^2 = r^2 - a^2 \; ,$$

à méridienne équilatère, l'équation (3) est identique à celle des *géodésiques* de la surface. L'intégration se fait par les fonctions elliptiques.

8. — *Détermination des surfaces* (Σ) *dont les lignes asymptotiques sont des courbes* (C).

La propriété des courbes (C) d'être les courbes dont le plan osculateur au point (x, y, z) courant est parallèle à la direction de droite $(x, y, -z)$ donne immédiatement l'équation

$$px + qy + z = 0$$

aux dérivées partielles, linéaire, du premier ordre des surfaces (Σ).

z est donc une fonction homogène, de degré -1 de x et y.

L'équation générale des surfaces (Σ) peut donc être prise sous la forme

$$z = \frac{1}{r} e^{\Phi} \; ;$$

Φ est une fonction arbitraire de θ.

Les lignes (C) tracées sur cette surface ont pour équation

$$\Phi'' = \frac{r^2 - 2r'^2}{r^2} + 4\frac{r'}{r}\Phi' - \Phi'^2 \; .$$

$$\operatorname{Log}\left(\frac{z}{z_0}\right) = \pm \int \sqrt{\frac{1 + \Phi'^2 - \Phi''}{2}}\, d\theta \; .$$

Elles sont identiques aux deux familles d'asymptotiques.

Ces surfaces (Σ) rentrent dans le type plus général des surfaces de JAMET

$$xf\left(\frac{y}{x}\right) = \mathrm{F}(z)$$

avec ici

$$\mathrm{F}(z) = \frac{1}{z} ;$$

d'où une nouvelle méthode de réduction à une quadrature de leurs lignes asymptotiques.

En particulier, la surface de révolution

$$z\sqrt{x^2 + y^2} = 1 ,$$

engendrée par la rotation de l'hyperbole équilatère autour d'une asymptote, admet pour asymptotiques et courbes (C) les courbes

$$2z'^2 = z^2 ,$$

$$2r'^2 = r^2 ,$$

$$r = r_0 e^{\frac{\theta}{\sqrt{2}}} .$$

Ce sont des spirales logarithmiques, en projection sur Oxy. Le même résultat s'obtient comme cas particulier $n = -1$ des surfaces

$$z = r^n ,$$

du paragraphe 2.