

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 38 (1939-1940)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR DES COURBES GAUCHES  
**Autor:** Turrière, E.  
**Kapitel:** variable aréolaire.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-515786>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 04.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR DES COURBES GAUCHES

PAR

E. TURRIÈRE (Montpellier).

---

## La variable aréolaire.

1. — Etant donnée une courbe plane quelconque, posons

$$x dy - y dx = r^2 d\theta = 2 d\sigma ;$$

$\sigma$  est l'aire balayée par le rayon vecteur OM à partir d'une position fixe OM<sub>0</sub>. Les dérivées étant prises par rapport à cette variable  $\sigma$ :

$$xy' - yx' = 2 ;$$

$$xy'' - yx'' = 0 ;$$

Posons:

$$\frac{x''}{x} = \frac{y''}{y} = \lambda .$$

Soient, d'autre part, le rayon R de courbure et  $\varpi$  la distance du pôle O à la tangente courante:

$$\frac{1}{R} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = - \frac{2\lambda}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} ,$$

$$\varpi = \frac{xy' - yx'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{2}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} ; \frac{ds}{d\sigma} = \frac{2}{\varpi} ;$$

l'expression de  $\lambda$  est donc

$$\lambda = - \frac{4}{R\varpi^3} .$$

D'où les équations générales

$$x'' + \frac{4}{R\varpi^3} x = 0 \quad y'' + \frac{4}{R\varpi^3} y = 0 \quad (1)$$

pour une courbe générale du plan.

Si cette courbe est supposée décrite par un point matériel libre sous l'action d'une force centrale émanant du centre fixe O, le temps est proportionnel à l'aire  $\sigma$  (loi des aires); les équations précédentes exprimant que la loi de force centrale est

$$F = - m C^2 \frac{r}{R\varpi^3}.$$

( $m$  masse du point,  $C$  constante des aires). Cette expression générale de la force centrale pour une trajectoire quelconque est due à MOIVRE; il la communiqua en 1705, sans démonstration, à Jean BERNOULLI, qui la démontra en 1706.

Comme autres formules de dérivation avec la variable  $\sigma$ , citons les suivantes:

$$r^2 \theta' = 2, \quad r' = \frac{2}{r} \cotg V.$$

$$r^3 \frac{d^2 r}{d\sigma^2} = 4 \left( 1 - \frac{r^4}{R\varpi^3} \right),$$

$$\frac{d^2 (r^2)}{d\sigma^2} = \frac{8}{\varpi^2} \left( 1 - \frac{r^2}{R\varpi} \right).$$

$$\frac{d^2 (r^n)}{d\sigma^2} = 4nr^{n-4} \left[ 1 - \frac{r^4}{R\varpi^3} + (n-1) \cotg^2 V \right];$$

$$= 4nr^{n-4} \left[ 2 - n + (n-1) \frac{r^2}{\varpi^2} - \frac{r^4}{R\varpi^3} \right].$$

$$\frac{d^2 (\text{Log } r)}{d\sigma^2} = \frac{4}{r^4} \left[ 2 - \frac{r^2}{\varpi^2} - \frac{r^4}{R\varpi^3} \right].$$

Il en résulte que  $r$  et  $\sigma$  sont linéairement liées pour les courbes  $r^4 = R\varpi^3$ ; celles-ci comprennent les cercles de centre O et les spirales hyperboliques  $r\theta = \text{const.}$

De même,  $r^2$  et  $\sigma$  sont liées linéairement pour

$$r^2 = R\varpi;$$

ces courbes comprennent les cercles et les spirales logarithmiques

$$\frac{r}{\varpi} = \text{const.}$$

### Courbes analogues aux géodésiques.

2. — Considérons maintenant l'équation différentielle

$$\begin{vmatrix} x'' & y'' & z'' \\ x' & y' & z' \\ x & y & -z \end{vmatrix} = 0, \quad (2)$$

définissant les courbes (C) caractérisées par la propriété suivante : *le plan osculateur au point courant M est constamment parallèle à la droite OM, symétrique de OM par rapport au plan Oxy de coordonnées.*

L'équation ci-dessus où les dérivées sont prises par rapport à une variable  $t$  quelconque est susceptible de prendre diverses formes par choix convenable de variable.

La variable étant l'azimut polaire  $\theta$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

l'équation prend la forme

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} - 2 \frac{r'}{r} \frac{dz}{d\theta} + \frac{rr'' - 2r'^2 - r^2}{r^2} z = 0. \quad (3)$$

Si la fonction  $r(\theta)$  de dérivées  $r'$  et  $r''$  est donnée, la question est de déterminer celles des courbes (C) situées sur un cylindre donné parallèle à l'axe Oz; elle dépend d'une équation linéaire, homogène du second ordre en  $z$ .

En introduisant la fonction

$$u = \frac{1}{r},$$

l'équation se met sous une forme plus simple:

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + 2 \frac{u'}{u} \frac{dz}{d\theta} - \frac{u + u''}{u} z = 0. \quad (4)$$