

# SUR UN PROCÉDÉ MIXTE POUR RÉSOUDRE LES PROBLÈMES DE CAUCHY ET DE GOURSAT RELATIFS A L'ÉQUATION DES TÉLÉGRAPHISTES

Autor(en): **Badesco, Radu**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1939-1940)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-515785>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

pour  $q'_2$  des valeurs s'échelonnant de 1,40 à 1,75, il y aura une forte présomption en faveur de la loi  $L_2$ , pour toutes les séries; de 1,65 à 2,40, ce sera la loi  $L_1$ ; de 1,50 à 2, ce sera une loi intermédiaire entre  $L_1$  et  $L_2$ , mais ne variant pas d'une série à l'autre. Si au contraire les résultats obtenus donnent une dispersion assez grande,  $q'_2$  variant par exemple de 1,40 à 2,40, il y a lieu de penser que la loi n'est pas la même pour toutes les séries; l'hypothèse que ce soit tantôt  $L_1$ , tantôt  $L_2$ , est alors plausible, mais ce sera plus probablement une loi contenant au moins un paramètre variable et qui varie de  $L_1$  à  $L_2$ .

Bien entendu enfin on ne devra pas exprimer de conclusion définitive sans avoir rapproché les résultats statistiques de l'étude des conditions des expériences. Si, par exemple, quinze séries d'expériences sont comparables entre elles et que les cinq autres aient été effectuées dans des conditions différentes, c'est un fait dont il faudra évidemment tenir compte.

---

## SUR UN PROCÉDÉ MIXTE POUR RÉSOUDRE LES PROBLÈMES DE CAUCHY ET DE GOURSAT RELATIFS A L'ÉQUATION DES TÉLÉGRAPHISTES

PAR

Radu BADESCO (Cluj, Roumanie).

---

Le problème célèbre de la télégraphie dans un fil rectiligne indéfini, ramené pour la première fois par KIRCHHOFF à une équation aux dérivées partielles du type

$$A \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + B \frac{\partial U}{\partial t} - C \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

où A, B, C sont des constantes positives, a été étudié de différents points de vue par un grand nombre de savants. Les travaux

de POINCARÉ et de M.-E. PICARD en particulier<sup>1</sup> ont apporté une contribution des plus importantes pour éclaircir cette question.

Résumons le problème mathématique correspondant à la détermination de la force électrique  $U$  en tenant compte de la théorie de MAXWELL. On considère une décharge électrique ayant lieu dans un intervalle  $(a, b)$  d'un fil rectiligne indéfini et l'on trouve que la composante de la force  $U$  cherchée est donnée, au moment  $t$ , et au point  $M$ , d'abscisse  $x$ , par l'équation aux dérivées partielles (1) dans laquelle:

$A$  est le produit de la constante électrique par le coefficient de perméabilité électrique,

$B$  est le double du produit par  $\pi$  du coefficient de conductibilité par celui de la perméabilité électrique,

$C$  est la vitesse de la lumière.

Un choix convenable des unités nous permet de supposer  $A = 2B = C$ , de sorte que l'équation correspondante à (1) s'écrira:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 . \quad (1)$$

C'est une équation aux dérivées partielles du second ordre et du type hyperbolique, les caractéristiques étant les bissectrices des axes. Cette équation peut être réduite à la suivante

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + V = 0 \quad (2)$$

en effectuant le changement de fonction

$$U(x, t) = e^{-t} \cdot V(x, t) , \quad (3)$$

ou bien à l'équation plus simple

$$\frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} = W , \quad (4)$$

en faisant les changements de variables

$$2X = t + x , \quad 2Y = t - x . \quad (5)$$

<sup>1</sup> E. PICARD, *Bulletin de la Soc. math. de France*, t. 22, 1894.  
H. POINCARÉ, *Comptes rendus Ac. des Sciences*, Paris, 1893.

Cette dernière équation a comme caractéristiques les droites parallèles aux axes de coordonnées OX et OY.

Dans une série de leçons faites à la Sorbonne, en 1925, M. E. PICARD a indiqué quatre types de problèmes concernant les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre et du type hyperbolique, avec des conditions initiales distinctes. Nous aborderons ici les deux premiers, — le problème classique de CAUCHY et celui de GOURSAT, — en utilisant la méthode élémentaire des séries, convenablement modifiée pour traiter le cas où les données sont seulement intégrales au sens de RIEMANN. Il est bien connu que cette méthode ne fournit généralement qu'une solution soumise à de grandes restrictions mais, dans les cas particuliers choisis — équations (2) et (4) — elle peut donner la solution même pour des fonctions non bornées.

### *Le problème de Cauchy.*

Considérons l'équation (2) et proposons-nous de déterminer la solution  $V(x, t)$  qui satisfasse aux conditions <sup>1</sup>

$$V(x, 0) = A(x), \quad \left[ \frac{\partial V}{\partial t} \right]_{t=0} = B(x), \quad \text{pour } 0 < a \leq x \leq b, \quad (6)$$

les fonctions connues  $A(x)$  et  $B(x)$  étant nulles en dehors de l'intervalle de perturbation  $(a, b)$ . C'est le problème bien connu de CAUCHY qui donne la solution du problème des télégraphistes en tenant compte du changement (2).

Pour cela, supposons que la solution  $V(x, t)$  cherchée peut être représentée par une série de TAYLOR en  $t$

$$V(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} R_n(x). \quad (7)$$

Calculant alors les dérivées qui figurent dans (2) et procédant à une identification en  $t$ , on trouve l'équation aux différences mêlées

$$R_n(x) = R_{n-2}(x) + \frac{d^2 R_{n-2}}{dx^2} \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (8)$$

<sup>1</sup> La perturbation électrique a lieu au moment  $t = 0$ .

qui nous permettra de calculer toutes les fonctions  $R_n(x)$ . En éliminant, par des dérivations, les fonctions

$$R_{2p-2}(x), R_{2p-4}(x), \dots, R_4(x), R_2(x), \\ R_{2p-1}(x), R_{2p-3}(x), \dots, R_5(x), R_3(x),$$

on obtient par un calcul élémentaire, pour  $n = 2p$ ,

$$R_{2p}(x) = \sum_{i=0}^p \frac{p(p-1) \dots (p-i+1)}{i!} R_0^{(2p-2i)}(x) \quad (9)$$

et pour  $n = 2p + 1$

$$R_{2p+1}(x) = \sum_{i=0}^p \frac{p(p-1) \dots (p-i+1)}{i!} R_1^{(2p-2i)}(x). \quad (10)$$

Dans les expressions de ces fonctions figurent seulement les fonctions  $R_0(x)$  et  $R_1(x)$ , ainsi que leurs dérivées. Comme les coefficients qui figurent dans les sommes (9) et (10) sont justement les coefficients binomiaux, il est naturel de chercher une représentation intégrale des fonctions  $R_0(x)$  et  $R_1(x)$  telle que les dérivées paires par rapport à  $x$  se reproduisent multipliées sous le signe  $\int$  par une certaine puissance de la variable d'intégration. Une telle représentation est donnée par l'intégrale

$$R_0(x) = \int_{\alpha}^{\beta} K(u) \cdot F(xu) \cdot du, \quad (11)$$

car la dérivée seconde est

$$R_0''(x) = \int_{\alpha}^{\beta} K(u) \cdot F''(xu) \cdot u^2 du$$

et si l'on suppose que la fonction  $F(x)$  est une solution de l'équation différentielle

$$F''(x) = \pm F(x), \quad (12)$$

l'intégrale correspondante répondra aux conditions requises. Prenons  $\alpha = 0$  et  $\beta = \infty$  pour retrouver une classe d'intégrales

connues et posons

$$R_0(x) = \int_0^{\infty} K_0(u) \cdot \cos(xu) \cdot du, \quad (13)$$

$$R_1(x) = \int_0^{\infty} K_1(u) \cdot \sin(xu) \cdot du,$$

$K_0(u)$  et  $K_1(u)$  étant deux fonctions intégrales pour  $u > 0$ . Or, les égalités (13) peuvent être inversées par les relations bien connues

$$R_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_0(u) \cdot \cos(xu) \cdot du, \quad (14)$$

$(x > 0)$

$$K_1(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_1(u) \cdot \sin(xu) \cdot du,$$

de sorte que les fonctions  $K_0(u)$  et  $K_1(u)$  sont parfaitement définies dès que l'on connaît  $R_0(x)$  et  $R_1(x)$ , et réciproquement.

On calcule maintenant très facilement les sommes (9) et (10)

$$R_{2p}(x) = \int_0^{\infty} K_0(u) \cdot (1 - u^2)^p \cdot \cos(xu) \cdot du, \quad (15)$$

$$R_{2p+1}(x) = \int_0^{\infty} K_1(u) \cdot (1 - u^2)^p \cdot \sin(xu) \cdot du,$$

et l'on obtient immédiatement l'expression correspondante de la solution cherchée<sup>1</sup> observant que les séries qui figurent sous le signe  $\int$  sont justement les développements des fonctions  $\cos t \sqrt{u^2 - 1}$  et  $\sin t \sqrt{u^2 - 1}$

$$V(x, t) = \int_0^{\infty} K_0(u) \cdot \cos t \sqrt{u^2 - 1} \cdot \cos(xu) \cdot du + \quad (16)$$

$$+ \int_0^{\infty} K_1(u) \cdot \sin t \sqrt{u^2 - 1} \cdot \sin(xu) \cdot du.$$

<sup>1</sup> Il est inutile de se préoccuper si l'on peut intervertir les signes  $\int$  et  $\Sigma$ .

On vérifie immédiatement que cette expression est une solution de l'équation (2), quelles que soient les fonctions  $K_0(u)$  et  $K_1(u)$  assujetties à la seule condition de rendre les intégrales correspondantes convergentes. Nous devons donc supposer que les intégrales

$$\int_0^{\infty} |K_0(u)| du, \quad \int_0^{\infty} |K_1(u)| du, \quad \int_0^{\infty} |R_0(u)| du \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} |R_1(u)| du \quad (17)$$

ont un sens, conditions identiques à celles qui se réfèrent à l'inversion des relations (13)<sup>1</sup>.

Les conditions de CAUCHY (6) nous permettent de déterminer par le même procédé les fonctions  $K_0(u)$  et  $K_1(u)$ , car ces conditions deviennent dans notre cas

$$\int_0^{\infty} K_0(u) \cdot \cos(xu) \cdot du = A(x), \quad \int_0^{\infty} \frac{K_1(u)}{\sqrt{u^2-1}} \sin(xu) \cdot du = B(x),$$

mais, pour pouvoir inverser la seconde, il faudra supposer que l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{K_1(u)}{\sqrt{u^2-1}} \right| du$$

a elle-aussi un sens. Le problème est ainsi résolu.

La solution (16) présente un grand avantage sur celle qui correspondrait aux expressions (9) et (10), cas où l'on doit supposer les fonctions  $R_0(x)$  et  $R_1(x)$  développables en une série de TAYLOR pour toutes les valeurs positives de  $x$ .

Nous avons retrouvé par cette voie élémentaire certains des résultats de POINCARÉ sous une forme légèrement différente. Par cette même voie, nous pourrions traiter aussi le problème de GOURSAT qui nous conduira à des résultats plus intéressants.

### *Le problème de Goursat.*

Ce problème consiste dans la détermination de la solution d'une équation aux dérivées partielles du second ordre et du type

<sup>1</sup> Voir E. PICARD, *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles...* Gauthier-Villars, Paris, 1927, page 42. On a des conditions analogues pour les fonctions  $A(x)$  et  $B(x)$ .

hyperbolique en se donnant les valeurs que cette solution prend sur deux caractéristiques de systèmes différents. Nous considérerons ici le cas de l'équation (4) car notre procédé de résolution n'est applicable que si les caractéristiques mentionnées sont des droites parallèles aux axes. Les données seront donc, pour  $a \leq x \leq b$ ,<sup>1</sup>

$$W(x_0, y) = A(y), \quad W(x, y_0) = B(x), \quad (18)$$

avec la condition de continuité  $A(y_0) = B(x_0)$ . Posons cette fois-ci

$$W(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y - y_0)^n}{n!} R_n(x) \quad (19)$$

et, après avoir calculé la dérivée  $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$ , procédons à une identification en  $(y - y_0)$  dans l'équation (4). On obtient le système infini d'équations aux différences mêlées

$$\frac{dR_n(x)}{dx} = R_{n-1}(x), \quad (n = 1, 2, \dots)$$

que l'on peut résoudre de la manière suivante: on intègre la première relation ( $n = 1$ ) de  $x_0$  à  $x$

$$R_1(x) = \int_{x_0}^x R_0(x_1) dx_1 + R_1(x_0),$$

on fait de même de la seconde ( $n = 2$ ) et, si l'on tient compte de la relation précédente, on obtient

$$R_2(x) = \int_{x_0}^x dx_2 \int_{x_0}^{x_2} R_0(x_1) dx_1 + R_1(x_0) \cdot (x - x_0) + R_2(x_0).$$

De proche en proche on arrive à l'expression générale de  $R_n(x)$

$$R_n(x) = \int_{x_0}^x dx_n \int_{x_0}^{x_n} dx_{n-1} \int_{x_0}^{x_{n-1}} dx_{n-2} \dots \int_{x_0}^{x_2} R_0(x_1) dx_1 + \sum_{i=1}^n R_i(x_0) \frac{(x - x_0)^{n-i}}{(n-i)!}.$$

<sup>1</sup> Nous remplaçons X et Y par x et y.



Les  $n$  intégrales du second membre peuvent être remplacées par une seule intégrale en utilisant une formule bien connue <sup>1</sup>

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} \cdot R_0(t) \cdot dt + \sum_{i=1}^n R_i(x_0) \frac{(x-x_0)^{n-i}}{(n-i)!}$$

et alors la solution cherchée pourra être écrite sous la forme <sup>2</sup>  
Les conditions (18) donnent

$$W(x_0, y) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(x_0) \frac{(y-y_0)^n}{n!} = A(y), \quad W(x, y_0) = R_0(x) = B(x)$$

et de la première on déduit que les constantes  $R_n(x_0)$  sont respectivement égales aux coefficients tayloriens correspondants au développement de la fonction  $A(y)$  au voisinage de la valeur  $y_0$ :

$$R_n(x_0) = \left[ \frac{d^n A(y)}{dy^n} \right]_{y=y_0} = A^{(n)}(y_0).$$

Sous la forme (20), la solution  $W(x, y)$  exige l'existence du développement taylorien de la fonction donnée  $A(y)$ , tandis que  $B(x)$  est supposée seulement intégrable au sens de RIEMANN. Cette remarque nous conduit à chercher si on ne peut pas former une solution de (4) en prenant l'intégrale qui figure dans la relation (20) et en lui ajoutant l'intégrale obtenue de celle-ci par le changement entre elles des variables  $x$  et  $y$  [l'équation (4) se présente sous la même forme après ce changement <sup>3</sup>] et dans laquelle  $A(t)$  serait remplacée par  $B(t)$ . En effet, la fonction

$$W(x, y) = A(y) + \int_{y_0}^y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n (y-t)^{n-1}}{n! (n-1)!} A(t) \cdot dt + \\ + B(x) + \int_{x_0}^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-t)^{n-1} (y-y_0)^n}{(n-1)! n!} B(t) \cdot dt \quad (21)$$

<sup>1</sup> Voir par exemple GOURSAT, *Analyse*, t. II, 4<sup>me</sup> éd., p. 520.

<sup>2</sup> Il est inutile, ici aussi, de se préoccuper si l'on peut intervertir les signes  $\Sigma$  et  $\int$ .

<sup>3</sup> On se borne à la recherche des fonctions  $W$  pour lesquelles on a  $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x}$ .

est bien une solution de l'équation (4), ce qui est facile à vérifier, mais elle ne satisfait plus aux conditions (18) car

$$\begin{aligned} \text{pour } x = x_0 \quad W(x_0, y) &= A(y) + B(x_0) , \\ \text{pour } y = y_0 \quad W(x, y_0) &= A(y_0) + B(x) = B(x_0) + B(x) . \end{aligned} \quad (22)$$

Comparant alors les conditions (18) et (22), on observe que, pour trouver la solution de (4) qui vérifie les conditions (2), il suffit d'ajouter à la fonction (21) la solution particulière de (4) prenant sur les droites caractéristiques  $x = x_0$  et  $y = y_0$  la valeur constante  $-B(x_0)$ . Cette solution s'obtient immédiatement de la fonction (20) en y faisant

$$R_n(x_0) = 0 , \quad (n = 1, 2, \dots) , \quad \text{car } R_n(x_0) = A^{(n)}(y_0) ,$$

et la fonction  $A(y)$  est maintenant une constante, — et remplaçant  $B(x)$  par  $-B(x_0)$ ; on trouve

$$-B(x_0) - B(x_0) \int_{x_0}^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-t)^{n-1} (y-y_0)^n}{(n-1)! n!} dt ,$$

solution que l'on peut encore écrire sous la forme

$$-B(x_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n (y-y_0)^n}{(n!)^2} = -B(x_0) \cdot J_0 \left[ 2 \sqrt{(x-x_0)(y_0-y)} \right] , \quad (23)$$

$J_0(u)$  étant la fonction de BESSEL d'ordre zéro.

La fonction que l'on obtient en ajoutant à (21) la solution (23) satisfait bien aux conditions (18); c'est la solution cherchée du problème de GOURSAT.

Si la fonction  $A(y)$  admet une dérivée intégrable dans  $(y_0, y)$ , une intégration par parties de la première intégrale figurant dans (21) nous permet d'englober le terme (23) dans la somme

qui est sous le signe  $\int_{y_0}^y : 1$

$$W(x, y) = B(x) + \int_{x_0}^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-t)^{n-1} (y-y_0)^n}{(n-1)! n!} B(t) dt + \\ + \int_{y_0}^y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y-t)^n (x-x_0)^n}{(n!)^2} \cdot \frac{dA(t)}{dt} dt . \quad (24)$$

La même opération peut se faire lorsque  $B(x)$  admet une dérivée intégrable dans  $(x_0, x)$ .

La solution du problème de GOURSAT mise sous la forme (21 + 24) ou (23) correspond aux cas suivants:

1° les fonctions  $A(y)$  et  $B(x)$  sont développables en série de TAYLOR respectivement dans les intervalles  $a \leq x_0 \leq x \leq b$  et  $c \leq y_0 \leq y \leq d$ ; dans ces conditions, la solution  $W(x, y)$  est définie dans le rectangle correspondant à ces intervalles et on peut la représenter aussi à l'aide des développements qui figurent dans la relation (20). On peut évidemment prendre aussi  $x < x_0$  et  $y < y_0$ .

2° Les fonctions  $A(y)$  et  $B(x)$  sont bornées et intégrables dans les intervalles mentionnés. Tel est l'exemple suivant:

$$A(y) = \sqrt{y - y_0}, \quad B(x) = \sqrt{x - x_0},$$

quand  $B(x_0) = A(y_0) = 0$ . Ces fonctions ne sont pas développables dans le voisinage des valeurs  $y_0$  et  $x_0$ .

3° Les fonctions  $A(y)$  et  $B(x)$  sont seulement intégrables, mais elles admettent des valeurs finies au point  $M_0(x_0, y_0)$ . Tel est le cas des fonctions:

$$A(y) = \frac{A_0(y)}{\sqrt[3]{(y - y_1)^2}}, \quad B(x) = \frac{B_0(x)}{\sqrt[3]{(x - x_1)^2}}, \quad \begin{array}{l} a \leq x_1 \leq b \\ c \leq y_1 \leq d \end{array}$$

<sup>1</sup> On observe que

$$A(y) - A(y_0) = \int_{y_0}^y \frac{dA(t)}{dt} dt .$$

où les numérateurs sont des fonctions bornées et intégrables, assujetties à vérifier pour les premiers membres l'égalité  $B(x_0) = A(y_0)$ . La solution  $W(x, y)$  est alors infinie sur les caractéristiques  $x = x_1$  et  $y = y_1$  comme  $A(y)$  et  $B(x)$ . Ce cas nous semble nouveau, les deux premiers rentrant dans les études générales faites du problème de GOURSAT.

*Remarque sur l'équation*

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = H(x) K(y) W(x, y) . \quad (25)$$

Dans une Note présentée à l'Académie des Lincei<sup>1</sup>, nous avons montré que la méthode de M. PICONE permettant la résolution des équations linéaires aux dérivées partielles du II<sup>e</sup> ordre et du type hyperbolique, pouvait être étendue aussi à des équations du même type ayant des coefficients non bornés, mais intégrables. En effet, prenant l'équation particulière (25), où  $H(x)$  et  $K(y)$  sont des fonctions données, intégrables au sens de RIEMANN, on peut tout de suite se rendre compte sur cet exemple particulier du motif pour lequel cette extension a été possible. Il suffit pour cela de faire les changements de variables

$$X = \int H(x) \cdot dx \quad \text{et} \quad Y = \int K(y) \cdot dy \quad (26)$$

qui nous conduisent à l'équation (4) pour laquelle le problème de GOURSAT a été déjà résolu. Il en est donc de même du problème correspondant à l'équation (25) et ainsi sa résolution ne suppose que l'intégrabilité des fonctions  $H(x)$  et  $K(y)$  qui ne figurent que dans les changements de variables (26).

Cette méthode s'étend aussi à l'équation linéaire générale du II<sup>e</sup> ordre et du type hyperbolique, extension que nous exposerons dans un autre recueil.

---

<sup>1</sup> Vol. XXVII, série 6-a, I sem., fasc. 12, p. 624.