

# Applications géométriques de $y'^2 + y^2 = f^2(x)$ .

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1939-1940)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **03.05.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

### Applications géométriques de $y'^2 + y^2 = f^2(x)$ .

7. — Deux questions de géométrie dépendent de l'équation différentielle du premier ordre <sup>1</sup>:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = f^2(x).$$

1<sup>o</sup> La détermination d'une courbe plane satisfaisant à une condition imposée entre l'abscisse curviligne  $s$  et l'azimut  $\theta$  du point courant:

$$s = F(\theta)$$

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dF}{d\theta}\right)^2.$$

C'est donc le problème d'*isométrie* par alignement sur un point fixe  $O$ : les rayons vecteurs issus de  $O$  déterminant des arcs égaux sur les diverses courbes intégrales. Le problème généralise celui des isométriques de la droite, qui se ramène aux fonctions elliptiques <sup>2</sup>.

2<sup>o</sup> La détermination des courbes planes telles que

$$r = f(\alpha)$$

$r$  désignant le rayon polaire  $OM = r$ , et  $\alpha$  étant l'angle d'inclinaison sur  $Ox$  de la tangente au point courant  $M$ . Si  $\varpi$  désigne la distance à cette tangente du pôle  $O$ , l'expression connue de  $r$

$$r^2 = \varpi^2 + \left(\frac{d\varpi}{d\alpha}\right)^2$$

donne l'équation

$$\varpi^2 + \left(\frac{d\varpi}{d\alpha}\right)^2 = f^2(\alpha).$$

<sup>1</sup> Cette équation a fait l'objet d'une courte note de M. Dragoslav MITRINOVITCH: Remarque sur une équation différentielle du premier ordre, *Publications mathématiques de l'Université de Belgrade*, 1934, p. 171-174.

<sup>2</sup> Maurice D'OCAGNE, Sur les isométriques d'une droite par rapport à certains systèmes de courbes planes. *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XIII, 1884-1885, p. 71-83.

Sur les isométriques d'une droite par rapport à un système de droites concourantes. *Ibid.*, t. XVII, 1888-1889, p. 171-175.

Le problème de l'éclaireur (à propos d'un article de M. E. TURRIÈRE). *L'Enseignement mathématique*, XVII<sup>e</sup> année, 1915, p. 336.

E. TURRIÈRE, Sur le problème de l'éclaireur. *L'Enseignement mathématique*, t. XVII, 1915, p. 212-215.

Prenons donc l'équation

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = f^2(\theta)$$

et posons

$$\text{tang } V = \frac{r d\theta}{dr} = \varphi ;$$

l'équation devient:

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = (1 + \varphi^2)(1 - f_1 \varphi) , \quad f_1 = \frac{f'}{f} , \quad f' = \frac{df}{d\theta} .$$

La réduction à la forme canonique de P. APPELL

$$\frac{dZ}{d\Theta} = Z^3 + J ,$$

se fait par le changement de variables:

$$\varphi = UZ + W ,$$

$$d\Theta = M \cdot d\theta ,$$

avec

$$W = \frac{1}{3f_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{f}{f'} ,$$

$$\text{Log } U = \int \left( \frac{1}{3f_1} - f_1 \right) d\theta , \quad 3 \text{Log } (f \cdot U) = \int \frac{f}{f'} d\theta ;$$

$$M = -f_1 \cdot U^2 ;$$

L'invariant J a l'expression:

$$J = -\frac{1}{27 U^3 f_1^3} \left( 9 \frac{df_1}{d\theta} + 18 f_1^2 + 2 \right) .$$

$$= -\frac{f}{27 U^3 f_1^3} (9 f f'' + 9 f'^2 + 2 f^2) .$$

8. — J est nul lorsque

$$9 \frac{df_1}{d\theta} + 18 f_1^2 + 2 = 0 ,$$

$$f_1 = -\frac{1}{3} \text{tang } \frac{2}{3} (\theta - \theta_0) ; \quad f^2 = A \cos \frac{2}{3} (\theta - \theta_0) ;$$

sans restriction de la généralité de la question,  $\theta_0$  peut être pris égal à zéro et  $A$  égal à 1

$$f_1 = -\frac{1}{3} \operatorname{tang} \frac{2}{3} \theta .$$

$$f^2 = \cos \frac{2}{3} \theta .$$

$$ds = \sqrt{\cos \frac{2}{3} \theta} d\theta ;$$

les courbes seront rectifiables au moyen de fonctions elliptiques du cas lemniscatique  $g_3 = 0$ , l'arc dépendant de l'intégrale:

$$\int \sqrt{\cos \varphi} \cdot d\varphi .$$

Les fonctions  $U$ ,  $W$ ,  $M$ ,  $\Theta$  sont ici:

$$W = -3 \operatorname{cotg} \frac{2}{3} \theta ,$$

$$\frac{1}{U^2} = \sin^3 \frac{2}{3} \theta \cos \frac{2}{3} \theta ,$$

$$\frac{4}{M} = 3 \sin^2 \frac{4}{3} \theta , \quad \Theta = -\operatorname{cotg} \frac{4}{3} \theta .$$

L'équation se réduit à

$$\frac{dZ}{d\Theta} = Z^3 ,$$

d'où:

$$2\Theta + \frac{1}{Z^2} = \operatorname{const} = k ,$$

$$2 \left( \operatorname{cotg} \frac{4}{3} \theta + k \right) \sin^2 \frac{2}{3} \theta \cos \frac{2}{3} \theta = \frac{1}{\left( \varrho + 3 \operatorname{cotg} \frac{2}{3} \theta \right)^2} ,$$

$$\left( \cos \frac{4}{3} \theta + k \sin \frac{4}{3} \theta \right) \cdot \sin \frac{4}{3} \theta \left[ \varrho + 3 \operatorname{cotg} \frac{2}{3} \theta \right]^2 = 1 .$$

L'intégration s'achève par quadrature en exprimant  $\varrho$  en fonction de la variable  $\operatorname{tg} \frac{2}{3} \theta$ .

A signaler aussi le cas d'intégration  $f_1 = \operatorname{constante}$  par séparation des variables.

9. — Comme courbes se rattachant à cette équation, il y a lieu de citer les deux suivantes :

I. Soient N et T' les traces respectives sur les axes Ox et Oy de la normale MN et de la tangente MTT' d'une courbe (C).

La condition  $NT' = 1$  caractérise des courbes (C) telles que

$$r = \cos \alpha , \\ MN = \sin \theta , \quad ON = \sin \widehat{OMN} ;$$

le cercle circonscrit au triangle OMN a pour diamètre  $NT' = 1$ .

L'équation des courbes est :

$$\omega^2 + \left( \frac{d\omega}{d\alpha} \right)^2 = \cos^2 \alpha$$

$\omega$  étant la distance du pôle O à la tangente d'inclinaison  $\alpha$  sur Ox.

II. L'équation de Riccati

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 ,$$

est équivalente à

$$r^2 = \operatorname{tg} \alpha .$$

### La courbe atuptique.

10. — J. PORRO a donné le nom de courbe *atuptique* à l'intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(x^2 + y^2) + 2ay \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}{y(x^2 + y^2) + 2ax \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}} .$$

Ce serait la forme théoriquement assignée aux aubes destinées aux moteurs hydrauliques <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> J. PORRO, *Essai sur la théorie des moteurs hydrauliques*. Turin, 1844, p. 29.

Théorie générale des moteurs hydrauliques. C. R., 1852, t. XXXIV, p. 172-174.

H. BROCARD, *Notes de bibliographie des courbes géométriques*, 1897, p. 66.

G. LORIA, *Curve piane speciali*, I, 1930, p. 118.

Le nom dérive de τύπτω = je frappe de près (par opposition à βάλλω). C'est la courbe sans choc.