III. — Systèmes convergents.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1937)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

d'où

$$\widehat{S_1B} - \widehat{CS_1'} = 2\varphi\ , \qquad \widehat{S_1B} - \widehat{CS_2} - \widehat{S_2S_1'} = 2\varphi$$

$$2\varphi = -\widehat{BA} - AS_1 - \widehat{CS_3} - \widehat{S_2S_1'} = -\widehat{BA} - s_1 + \widehat{S_2A} + \widehat{AC} - s_3$$

$$= -\widehat{BA} + \widehat{AC} - s_1 - s_2 - s_3$$

et

$$s_1 + s_2 + s_3 + 2\varphi = \widehat{AB} + \widehat{BA'} = \widehat{AA'} = \alpha$$

$$s_1 + s_2 + s_3 + 2\varphi - \alpha = 0\ .$$

Résultat qui généralise la formule donnée par M. Boulanger (*N.A.*, 1919, p. 22).

III. — Systèmes convergents.

7\. — Soient $l, m, n,$ des constantes proportionnelles aux éléments homologues des trois divisions du n° I.

Si l'on a

$$al + bm + cn = 0\ , \tag{1}$$

il existe toujours, en vertu du théorème des projections, une droite D et un angle φ, tels que les projections (φ) sur les côtés, d'un point S de cette droite, déterminent les trois divisions proposées.

S, S_2, étant les intersections de D avec le cercle circonscrit, les droites Δ_1, Δ_2 du système sont les droites de Simson (φ) de ces points.

Si S se transporte à l'infini, en vertu du n° II-4, le cercle de rayon infini correspondant, se compose de la droite de l'infini et de la droite de Simson ($\pi - \varphi$) d'un point S_3 tel que AS_3 soit antiparallèle à D par rapport à l'angle B.A.C.

Désignons par δ cette droite de Simson. On voit qu'elle est la même, que S s'éloigne indéfiniment dans un sens ou dans l'autre.

L'équation (1) *constitue donc une condition suffisante de convergence du système.*

8. — Soient λ', μ', ν' les angles dirigés de D avec a, b, c. On a

$$\frac{\sin\cdot(\lambda'-\varphi)}{l} = \frac{\sin\cdot(\mu'-\varphi)}{m} = \frac{\sin\cdot(\nu'-\varphi)}{n} . \qquad (2)$$

Soient dans un système quelconque supposé convergent λ, μ, ν les seconds points d'intersections de Γ avec a, b, c; on a

$$\frac{A\mu}{A\nu} = \frac{AN}{AM}$$

et si S se transporte à l'infini

$$\lim \frac{A\mu}{A\nu} = \frac{n}{m} ,$$

λ, μ, ν sont alors en ligne droite, désignons par les mêmes lettres les angles que fait cette droite avec les côtés, on a

$$\frac{\sin\nu}{\sin\mu} = \frac{A\mu}{A\nu} = \frac{n}{m} .$$

On aurait de même

$$\frac{\sin\lambda}{\sin\mu} = \frac{l}{m} ,$$

$$\frac{\sin\lambda}{l} = \frac{\sin\mu}{m} = \frac{\sin\nu}{n} . \qquad (3)$$

Or

$$a\sin\cdot\lambda + b\sin\cdot\mu + c\sin\cdot\nu = 0 ,$$

donc

$$al + bm + cn = 0 ,$$

ce qui prouve que *la condition* (I) *du n° 7 est nécessaire.*

La droite $\lambda\,\mu\,\nu$ est la droite δ du système.

La comparaison de (2) avec (3) montre que δ est parallèle à toute droite qui fait avec les côtés, les angles $(\lambda-\varphi)$, $(\mu'-\varphi)$, $(\nu'-\varphi)$, donc

$$(D\,,\,\delta) = \varphi .$$

9. — La formule (1) est la condition nécessaire et suffisante pour que le moment de la vitesse du barycentre L.M.N., par rapport au point de Lemoine soit nul. La condition nécessaire

et suffisante de convergence est donc que le barycentre L.M.N. décrive une droite qui passe par le point de Lemoine.

La condition peut encore s'écrire

$$l \sin \cdot \mathrm{A} + m \sin \cdot \mathrm{B} + n \sin \cdot \mathrm{C} = 0$$

et sous cette forme, elle s'applique au cas où les côtés passent par un même point.

10. — Nous arrivons, maintenant, à la propriété capitale des systèmes convergents.

Soient, V un point quelconque du plan; $L_1.M_1.N_1.$, trois points homologues fixes du système; L, M, N, trois points homologues quelconques.

Je fais une inversion de pôle V, en adoptant les notations du nº I — L'.M'., M'.N'. enveloppent respectivement les coniques (C) et (A).

Soit zz', xx' les positions limites de ces droites quand L est à l'infini, λ_1 μ_1, les angles de zz', avec a et b; μ_2, ν_2 les angles de xx' avec b et c. On a

$$\frac{\overline{L_1 L}}{\overline{L_1' L'}} = \frac{\overline{L_1 V}}{\overline{L' V}}, \tag{1}$$

$$\frac{\overline{M_1 M}}{\overline{M_1' M'}} = \frac{\overline{M_1 V}}{\overline{M' V}}, \tag{2}$$

$$\frac{\overline{N_1 N}}{\overline{N_1' N'}} = \frac{\overline{N_1 V}}{\overline{N' V}}. \tag{3}$$

(1) et (2) donnent

$$\frac{\overline{M'V}}{\overline{L'V}} \times \frac{\overline{L_1 V}}{\overline{M_1 V}} = \frac{\overline{M_1' M'}}{\overline{M_1 M}} \times \frac{\overline{L_1 L}}{\overline{L_1' L'}},$$

$$\frac{\overline{M'V}}{\overline{L'V}} = \frac{\overline{M_1 V} \times \overline{M_1' M}}{\overline{L_1 V} \times \overline{L_1' L'}} \times \frac{l}{m}, \tag{4}$$

or, à la limite, si L est à l'infini

$$\overline{L_1' L'} = \overline{L' V}, \tag{5}$$

$$\overline{M_1' M'} = \overline{M_1' V}, \tag{6}$$

d'un autre côté

$$\frac{\sin \lambda_1}{\sin \mu_1} = \lim \cdot \frac{\sin \widehat{M'L'V}}{\sin \widehat{L'M'V}} = \lim \cdot \frac{M'V}{L'V} \tag{7}$$

et d'après (4), (5), (6)

$$\frac{\sin \lambda_1}{\sin \mu_1} = \frac{\overline{M_1V} \cdot \overline{M'V}}{\overline{L_1V} \cdot \overline{L_1'V}} \times \frac{l}{m} = \frac{l}{m} \tag{8}$$

$$\lambda_1 = \lambda\,, \qquad \mu_1 = \mu\,. \tag{9}$$

On aurait de même $\mu_2 = \mu$, $\nu_2 = \nu$, donc zz' et xx' se confondent avec une parallèle à δ.

Les deux coniques (C) et (A) ont cette parallèle pour tangente commune. Le cercle Γ correspondant est une ligne droite qui passe par V et se confond avec xz; il peut être exclu du groupe des quatre cercles Γ qui passent en général par V.

Donc: *dans tout système convergent, l'enveloppe de la corde commune au cercle variable Γ et à une position fixe Γ_0 quelconque de ce cercle est une conique Σ tangente à Δ_1, Δ_2 et δ.*

IV. — Systèmes orthogonaux.

11. — Si Δ_1, Δ' et δ passent par un même point Ω la conique Σ se réduit à Ω et, par suite, la corde commune à Γ et Γ_0 passe constamment par ce point.

Donc dans tout système convergent, si Δ_1, Δ' et *δ passent par un même point, le cercle Γ reste orthogonal à un cercle fixe, ayant pour centre le point d'intersection de ces trois droites.*

Nous dirons alors que le système est *orthogonal.*

12. — Soient l, m, n, les trois paramètres définis au nº 7, et satisfaisant à l'équation (1) de ce numéro.

Proposons-nous de construire un système convergent orthogonal, l'angle φ étant arbitraire.

La direction δ est donnée par les équations (3) nº 8 et δ se trouve comme étant une droite de Simson ($\pi - \varphi$) de direction donnée.