II. — Droites de Simson sous un angle quelconque.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1937)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

3. — Il y a trois systèmes de positions L.M.N., en ligne droite, deux sont en général à distance finie, nous les désignerons par Δ_1 et Δ_2; la troisième est la droite de l'infini. Si le cercle Γ correspondant coupe les côtés en trois autres points à distance finie, ces points sont en ligne droite, et nous dirons que le système est *convergent.* Dans le cas contraire, nous dirons qu'il est *divergent.*

Avant de passer à l'étude des systèmes convergents, nous examinerons quelques propriétés des droites de Simson généralisées.

II. — Droites de Simson sous un angle quelconque.

4. — Les projections sous l'angle φ d'un point du plan d'un triangle sur les côtés et les projections $(\pi - \varphi)$ de son inverse, sont sur une même circonférence. Si l'inverse est à l'infini, ce cercle devient la droite de Simson, sous l'angle φ du point donné. Le lieu des points qui ont des droites de Simson sous un angle quelconque est le cercle circonscrit (*J. de Vuibert*, 37$^{\text{me}}$ année, p. 45).

5. — Les points dont les droites de Simson (φ) passent par un point Q sont sur une hyberbole passant par Q, par un sommet A, et, admettant pour directions asymptotiques, celles des projetantes (φ) sur les côtés B.A. et C.A.

Cette conique coupe le cercle circonscrit en trois autres points. *Donc la condition de convergence des droites de Simson* (φ) *de trois points* S, S_2, S_3, *est que* S_2, S_3 *soit antiparallèle à* A.S. *par rapport à l'angle* B.A.C., *dévié de l'angle* $(- \varphi)$.

6. — Soient, s, s_2, s_3, α les distances angulaires dirigées de S, S_2, S_3, A, à A par rapport au centre O du cercle circonscrit. A′ étant l'extrémité de la corde AA′ parallèle à B.C. — Par A, je mène la corde AS_1' parallèle à S_2, S_3 ; ou a, le rayon étant pris pour unité, $\widehat{S_2S_1} = s_3$.

La condition de convergence est alors que AS_1 et AS, soient antiparallèles, etc... C'est-à-dire que l'on ait

$$\widehat{S_1B} - \varphi = \varphi - \widehat{S_1'C}$$

d'où

$$\widehat{S_1B} - \widehat{CS_1'} = 2\varphi\,, \qquad \widehat{S_1B} - \widehat{CS_2} - \widehat{S_2S_1'} = 2\varphi$$

$$2\varphi = -\widehat{BA} - AS_1 - \widehat{CS_3} - \widehat{S_2S_1'} = -\widehat{BA} - s_1 + \widehat{S_2A} + \widehat{AC} - s_3$$

$$= -\widehat{BA} + \widehat{AC} - s_1 - s_2 - s_3$$

et

$$s_1 + s_2 + s_3 + 2\varphi = \widehat{AB} + \widehat{BA'} = \widehat{AA'} = \alpha$$

$$s_1 + s_2 + s_3 + 2\varphi - \alpha = 0\,.$$

Résultat qui généralise la formule donnée par M. Boulanger (*N.A.*, 1919, p. 22).

III. — Systèmes convergents.

7. — Soient l, m, n, des constantes proportionnelles aux éléments homologues des trois divisions du n° I.

Si l'on a

$$al + bm + cn = 0\,, \tag{1}$$

il existe toujours, en vertu du théorème des projections, une droite D et un angle φ, tels que les projections (φ) sur les côtés, d'un point S de cette droite, déterminent les trois divisions proposées.

S, S_2, étant les intersections de D avec le cercle circonscrit, les droites Δ_1, Δ_2 du système sont les droites de Simson (φ) de ces points.

Si S se transporte à l'infini, en vertu du n° II-4, le cercle de rayon infini correspondant, se compose de la droite de l'infini et de la droite de Simson ($\pi - \varphi$) d'un point S_3 tel que AS_3 soit antiparallèle à D par rapport à l'angle B.A.C.

Désignons par δ cette droite de Simson. On voit qu'elle est la même, que S s'éloigne indéfiniment dans un sens ou dans l'autre.

L'équation (1) *constitue donc une condition suffisante de convergence du système.*