SUR LES DIVISIONS SEMBLABLES TRACÉES SUR LES CÔTÉS D'UN TRIANGLE

Autor(en): **Marchay, R.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1937)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-28036

SUR LES DIVISIONS SEMBLABLES TRACÉES SUR LES CÔTÉS D'UN TRIANGLE

PAR

R. MARCHAY (Rouen).

I. — THÉORÈME GÉNÉRAL.

1. Soit un triangle A.B.C., L.M.N., des points mobiles qui déterminent respectivement sur les côtés a, b, c, des divisions semblables.

Soit V un point quelconque du plan. Faisons une inversion de pôle V: a, b, et c, se transforment en trois cercles a', b', c'; ceux des cercles L.M.N. ou Γ qui passent par V, se transforment en des droites.

Accentuons: les inverses L', M', N', de L, M, N, appartiennent à des divisions homographiques, sur a, b, c, qui ont V pour point commun. Il en résulte que les cercles M'.N'.A'. et M'.L'.C'. passent respectivement par des points E et F distincts de A' et C' et qui ne dépendent que de la position de V.

A tout point M', correspondent deux intersections du cercle E.M'.N'.A. avec c, l'enveloppe de M'.N'. quand M et N. sont supposés décrire seuls les divisions données est donc une conique.

De même l'enveloppe de M'.L'. quand M et L sont supposés décrire seuls les divisions données est une conique.

Il en résulte que L', M', N', ont quatre systèmes de positions en ligne droite, et, *par le point* V *passent au plus quatre cercles* Γ.

2. — On en conclut que *l'enveloppe de la corde commune au cercle* Γ *et à une position fixe* Γ_0 *de ce cercle est une courbe de troisième classe au plus.*

3. — Il y a trois systèmes de positions L.M.N., en ligne droite, deux sont en général à distance finie, nous les désignerons par Δ_1 et Δ_2; la troisième est la droite de l'infini. Si le cercle Γ correspondant coupe les côtés en trois autres points à distance finie, ces points sont en ligne droite, et nous dirons que le système est *convergent*. Dans le cas contraire, nous dirons qu'il est *divergent*.

Avant de passer à l'étude des systèmes convergents, nous examinerons quelques propriétés des droites de Simson généralisées.

II. — Droites de Simson sous un angle quelconque.

4. — Les projections sous l'angle φ d'un point du plan d'un triangle sur les côtés et les projections $(\pi - \varphi)$ de son inverse, sont sur une même circonférence. Si l'inverse est à l'infini, ce cercle devient la droite de Simson, sous l'angle φ du point donné. Le lieu des points qui ont des droites de Simson sous un angle quelconque est le cercle circonscrit (*J. de Vuibert*, 37me année, p. 45).

5. — Les points dont les droites de Simson (φ) passent par un point Q sont sur une hyberbole passant par Q, par un sommet A, et, admettant pour directions asymptotiques, celles des projetantes (φ) sur les côtés B.A. et C.A.

Cette conique coupe le cercle circonscrit en trois autres points. *Donc la condition de convergence des droites de Simson* (φ) *de trois points* S, S_2, S_3, *est que* S_2, S_3 *soit antiparallèle à* A.S. *par rapport à l'angle* B.A.C., *dévié de l'angle* $(-\varphi)$.

6. — Soient, s, s_2, s_3, α les distances angulaires dirigées de S, S_2, S_3, A, à A par rapport au centre O du cercle circonscrit. A' étant l'extrémité de la corde AA' parallèle à B.C. — Par A, je mène la corde AS_1' parallèle à S_2, S_3; ou a, le rayon étant pris pour unité, $\widehat{S_2S_1} = s_3$.

La condition de convergence est alors que AS_1 et AS, soient antiparallèles, etc... C'est-à-dire que l'on ait

$$\widehat{S_1B} - \varphi = \varphi - \widehat{S_1'C}$$

d'où

$$\widehat{S_1B} - \widehat{CS_1'} = 2\varphi\ , \qquad \widehat{S_1B} - \widehat{CS_2} - \widehat{S_2S_1'} = 2\varphi$$

$$2\varphi = -\widehat{BA} - AS_1 - \widehat{CS_3} - \widehat{S_2S_1'} = -\widehat{BA} - s_1 + \widehat{S_2A} + \widehat{AC} - s_3$$

$$= -\widehat{BA} + \widehat{AC} - s_1 - s_2 - s_3$$

et

$$s_1 + s_2 + s_3 + 2\varphi = \widehat{AB} + \widehat{BA'} = \widehat{AA'} = \alpha$$

$$s_1 + s_2 + s_3 + 2\varphi - \alpha = 0\ .$$

Résultat qui généralise la formule donnée par M. Boulanger (*N.A.*, 1919, p. 22).

III. — Systèmes convergents.

7. — Soient l, m, n, des constantes proportionnelles aux éléments homologues des trois divisions du n° I.

Si l'on a

$$al + bm + cn = 0\ , \tag{1}$$

il existe toujours, en vertu du théorème des projections, une droite D et un angle φ, tels que les projections (φ) sur les côtés, d'un point S de cette droite, déterminent les trois divisions proposées.

S, S_2, étant les intersections de D avec le cercle circonscrit, les droites Δ_1, Δ_2 du système sont les droites de Simson (φ) de ces points.

Si S se transporte à l'infini, en vertu du n° II-4, le cercle de rayon infini correspondant, se compose de la droite de l'infini et de la droite de Simson ($\pi - \varphi$) d'un point S_3 tel que AS_3 soit antiparallèle à D par rapport à l'angle B.A.C.

Désignons par δ cette droite de Simson. On voit qu'elle est la même, que S s'éloigne indéfiniment dans un sens ou dans l'autre.

L'équation (1) *constitue donc une condition suffisante de convergence du système.*

8. — Soient λ', μ', ν' les angles dirigés de D avec a, b, c. On a

$$\frac{\sin\cdot(\lambda'-\varphi)}{l}=\frac{\sin\cdot(\mu'-\varphi)}{m}=\frac{\sin\cdot(\nu'-\varphi)}{n}\ . \tag{2}$$

Soient dans un système quelconque supposé convergent λ, μ, ν les seconds points d'intersections de Γ avec a, b, c; on a

$$\frac{A\mu}{A\nu}=\frac{AN}{AM}$$

et si S se transporte à l'infini

$$\lim\frac{A\mu}{A\nu}=\frac{n}{m}\ ,$$

λ, μ, ν sont alors en ligne droite, désignons par les mêmes lettres les angles que fait cette droite avec les côtés, on a

$$\frac{\sin\nu}{\sin\mu}=\frac{A\mu}{A\nu}=\frac{n}{m}\ .$$

On aurait de même

$$\frac{\sin\lambda}{\sin\mu}=\frac{l}{m}\ ,$$

$$\frac{\sin\lambda}{l}=\frac{\sin\mu}{m}=\frac{\sin\nu}{n}\ . \tag{3}$$

Or

$$a\sin\cdot\lambda+b\sin\cdot\mu+c\sin\cdot\nu=0\ ,$$

donc

$$al+bm+cn=0\ ,$$

ce qui prouve que *la condition* (I) *du n° 7 est nécessaire.*

La droite $\lambda\,\mu\,\nu$ est la droite δ du système.

La comparaison de (2) avec (3) montre que δ est parallèle à toute droite qui fait avec les côtés, les angles $(\lambda-\varphi)$, $(\mu'-\varphi)$, $(\nu'-\varphi)$, donc

$$(D\ ,\ \delta)=\varphi\ .$$

9. — La formule (1) est la condition nécessaire et suffisante pour que le moment de la vitesse du barycentre L.M.N., par rapport au point de Lemoine soit nul. La condition nécessaire

et suffisante de convergence est donc que le barycentre L.M.N. décrive une droite qui passe par le point de Lemoine.

La condition peut encore s'écrire

$$l \sin \cdot \mathrm{A} + m \sin \cdot \mathrm{B} + n \sin \cdot \mathrm{C} = 0$$

et sous cette forme, elle s'applique au cas où les côtés passent par un même point.

10. — Nous arrivons, maintenant, à la propriété capitale des systèmes convergents.

Soient, V un point quelconque du plan; $L_1 . M_1 . N_1$., trois points homologues fixes du système; L, M, N, trois points homologues quelconques.

Je fais une inversion de pôle V, en adoptant les notations du nº I — L′.M′., M′.N′. enveloppent respectivement les coniques (C) et (A).

Soit zz', xx' les positions limites de ces droites quand L est à l'infini, λ_1 μ_1, les angles de zz', avec a et b; μ_2, ν_2 les angles de xx' avec b et c. On a

$$\frac{\overline{L_1 L}}{\overline{L'_1 L'}} = \frac{\overline{L_1 V}}{\overline{L' V}}, \qquad (1)$$

$$\frac{\overline{M_1 M}}{\overline{M'_1 M'}} = \frac{\overline{M_1 V}}{\overline{M' V}}, \qquad (2)$$

$$\frac{\overline{N_1 N}}{\overline{N'_1 N'}} = \frac{\overline{N_1 V}}{\overline{N' V}}. \qquad (3)$$

(1) et (2) donnent

$$\frac{\overline{M' V}}{\overline{L' V}} \times \frac{\overline{L_1 V}}{\overline{M_1 V}} = \frac{\overline{M'_1 M'}}{\overline{M_1 M}} \times \frac{\overline{L_1 L}}{\overline{L'_1 L'}},$$

$$\frac{\overline{M' V}}{\overline{L' V}} = \frac{\overline{M_1 V} \times \overline{M'_1 M}}{\overline{L_1 V} \times \overline{L'_1 L'}} \times \frac{l}{m}, \qquad (4)$$

or, à la limite, si L est à l'infini

$$\overline{L'_1 L'} = \overline{L' V}, \qquad (5)$$

$$\overline{M'_1 M'} = \overline{M'_1 V}, \qquad (6)$$

d'un autre côté

$$\frac{\sin \lambda_1}{\sin \mu_1} = \lim \cdot \frac{\sin \widehat{M'L'V}}{\sin \widehat{L'M'V}} = \lim \cdot \frac{M'V}{L'V} \tag{7}$$

et d'après (4), (5), (6)

$$\frac{\sin \lambda_1}{\sin \mu_1} = \frac{\overline{M_1V} \cdot \overline{M'V}}{\overline{L_1V} \cdot \overline{L_1'V}} \times \frac{l}{m} = \frac{l}{m} \tag{8}$$

$$\lambda_1 = \lambda\,, \qquad \mu_1 = \mu\,. \tag{9}$$

On aurait de même $\mu_2 = \mu$, $\nu_2 = \nu$, donc zz' et xx' se confondent avec une parallèle à δ.

Les deux coniques (C) et (A) ont cette parallèle pour tangente commune. Le cercle Γ correspondant est une ligne droite qui passe par V et se confond avec xz; il peut être exclu du groupe des quatre cercles Γ qui passent en général par V.

Donc: *dans tout système convergent, l'enveloppe de la corde commune au cercle variable* Γ *et à une position fixe* Γ_0 *quelconque de ce cercle est une conique* Σ *tangente à* Δ_1, Δ_2 *et* δ.

IV. — Systèmes orthogonaux.

11. — Si Δ_1, Δ' et δ passent par un même point Ω la conique Σ se réduit à Ω et, par suite, la corde commune à Γ et Γ_0 passe constamment par ce point.

Donc dans tout système convergent, si Δ_1, Δ' et δ *passent par un même point, le cercle* Γ *reste orthogonal à un cercle fixe, ayant pour centre le point d'intersection de ces trois droites.*

Nous dirons alors que le système est *orthogonal.*

12. — Soient l, m, n, les trois paramètres définis au n° 7, et satisfaisant à l'équation (1) de ce numéro.

Proposons-nous de construire un système convergent orthogonal, l'angle φ étant arbitraire.

La direction δ est donnée par les équations (3) n° 8 et δ se trouve comme étant une droite de Simson ($\pi - \varphi$) de direction donnée.

Soient Ω l'intersection de Δ_1 et Δ_2; S_1, S_2 les intersections de D avec le cercle circonscrit O, S_3 le troisième point dont la droite de Simpson (φ) passe par Ω; et Δ_3 cette droite. (D, δ) étant un angle égal à φ, la direction D est connue. Le point S_3 est donné alors par le théorème n° 5, et Ω est déterminé comme intersection de Δ_3 et de δ puisque δ doit passer par Ω.

S_1, S_2 sont alors les intersections de O avec une conique qui passe par S_3, Ω etc... (n° 5, 1[er] alinéa).

Si $\varphi \neq \pm \frac{\pi}{2}$ il n'y a qu'une position de Ω et par suite de D, le système se trouve alors parfaitement déterminé.

Si $\varphi = \frac{\pi}{2}$ les droites Δ_3 et δ coïncident, et il y a une infinité de positions pour D; ce qui démontre le théorème de Lemoyne dont le cas précédent est une généralisation.

13. — On peut se demander maintenant si cette généralisation n'est pas illusoire, en d'autres termes si le cercle variable Γ n'est pas toujours circonscrit au triangle podaire ordinaire d'un point qui décrit une droite ou une conique circonscrite.

Or si L, M, N, étaient les projections orthogonales sur a, b, c, d'un même point, les projetantes seraient tangentes à une conique de foyer S et dont le cercle principal aurait pour rayon celui de Γ multiplié par $\cos \cdot \varphi$.

Cette conique aurait trois tangentes qui passeraient par un même point.

En outre le point qui a L pour projection sur a, et le second point d'intersection de Γ avec b, pour projection sur b, ne décrit pas en général une droite.

Donc, les cas où $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ sont bien distincts de celui de Lemoyne.

V. — Autre généralisation.

14. — Par un point donné ne passent que trois positions du cercle podaire d'un point qui décrit une droite. Ceci résulte du n° III-10 puisque les projections du point sur les côtés déterminent un système convergent.

Ces cercles podaires ne peuvent donc que trois à trois, avoir deux points communs.

15. — Proposons-nous de chercher le lieu d'un point M dont le cercle podaire reste orthogonal à un cercle fixe C du plan d'un triangle.

Ce lieu coupe en n points une droite quelconque D ne joignant pas deux points inverses du lieu. Les cercles podaires de ces points sont orthogonaux à C, ils sont en outre orthogonaux au cercle, défini par le théorème de Lemoyne, relatif à D.

Or les n cercles sont distincts puisque aucun des points correspondants n'a son inverse sur D.

Ayant deux cercles orthogonaux communs ces cercles formant un faisceau, et, par suite, ont deux points communs.

Donc $n = 3$, d'après le nº 14.

Il en résulte que:

Le lieu d'un point du plan d'un triangle, dont le cercle podaire reste orthogonal à un cercle arbitraire du plan, est une cubique qui est à elle-même son inverse triangulaire, et qui, par suite, est circonscrite au triangle.

16. — Réciproquement:

Dans tout triangle, le cercle podaire d'un point qui décrit une cubique confondue avec son inverse, reste orthogonal à un cercle fixe.

En effet soient γ cette cubique et M, N, P, trois points de celle-ci tels que deux d'entre eux ne soient pas inverses l'un de l'autre.

Leurs inverses M′, N′, P′, appartiennent encore à γ; soit C le cercle orthogonal aux cercles podaires des points M, N, P.

Le lieu d'un point dont le cercle podaire reste orthogonal à C est une cubique γ, circonscrite au triangle et passant par M, N, P, — M′, N′, P′.

La cubique γ_1, a donc 9 points communs avec γ; il en résulte que les deux cubiques coïncident.