SUR LE ROULEMENT DES COURBES

SUR LE ROULEMENT DES COURBES

PAR

M. Buscheguennce (Moscou).

1. — Quand une courbe invariable Γ (dite *roulante*) roule sans glisser sur une courbe fixe donnée (dite *base*) C, un point fixe du plan de Γ parcourt la *roulette* C′. *On sait que si l'on donne arbitrairement deux quelconques de ces trois courbes* Γ, C, C′, *la troisième est définie.* Le roulement a été étudié en coordonnées ordinaires ou intrinsèques par Haton de la Goupillière [1] et divers autres géomètres.

Nous allons donner une solution du problème en utilisant la représentation des vecteurs dans un plan par des nombres complexes.

2. — La base C peut être représentée par l'équation rapportée à deux axes fixes Oxy

$$x + iy \equiv z = z(u) \ . \tag{1}$$

La courbe roulante Γ est définie par l'équation

$$\xi + i\eta \equiv \zeta = \zeta(v) \tag{2}$$

rapportée à des axes rectangulaires $\overline{O}\xi\eta$ invariablement liés au plan mobile de cette courbe Γ.

Si la courbe Γ roule, sans glissement, sur la base C, ces deux courbes sont constamment tangentes en des points associés, de sorte que l'on a

$$dz = d\zeta e^{i\theta} \ , \tag{3}$$

[1] *Etude géométrique et dynamique des roulettes planes ou sphériques.* Paris, Gauthier-Villars, 1910.

θ étant l'angle de rotation de l'axe mobile $\overline{\mathrm{O}}\xi$, à savoir $\theta = (\mathrm{O}x, \overline{\mathrm{O}}\xi)$; désignons par $\bar{z}$ le nombre complexe définissant l'origine mobile $\overline{\mathrm{O}}$ par rapport aux axes fixes. On a

$$z = \bar{z} + e^{i\theta}\zeta$$

ce que nous pouvons écrire

$$\bar{z} = z - e^{i\theta}\zeta \;.. \tag{4}$$

En prenant sur le plan mobile un point déterminé ζ', ce point parcourt sur le plan fixe la roulette C′ représentée, par rapport aux axes fixes, par l'équation

$$z' = \bar{z} + e^{i\theta}\zeta'$$

que nous pouvons, en vertu de (4), écrire

$$z' = z + (\zeta' - \zeta)e^{i\theta} \tag{5}$$

ou encore

$$z' = z + (\zeta' - \zeta)\frac{dz}{d\zeta} \cdot \tag{5'}$$

Les équations (3) et (5) sont fondamentales pour toutes les considérations qui suivent.

3. — *En premier lieu*, supposons que *l'on donne la base* C *et la roulante* Γ représentées respectivement par les équations (1) et (2); soient z_0, ζ_0, ... les nombres complexes conjugués respectivement de z, ζ, ...

Il s'agit de déterminer la roulette.

En égalant les modules des deux membres de l'équation (3) on obtient la relation

$$\sqrt{dz\, dz_0} = \sqrt{d\zeta\, d\zeta_0} \tag{6}$$

ou

$$\sqrt{\frac{dz}{du}\frac{dz_0}{du}}\, du = \pm\sqrt{\frac{d\zeta}{dv}\frac{d\zeta_0}{dv}}\, dv \tag{6'}$$

qui, tenant compte de la condition initiale, donne les points associés des courbes C et Γ; le paramètre v sera une fonction déterminée de u et alors la roulette C′ sera représentée par l'équation (5′).

4. — Supposons, en *second lieu*, données la *base* C par l'équation (1) et la *roulette* C′

$$z' = z'(w) \tag{7}$$

rapportée, elle aussi, aux *axes fixes; cherchons la roulante* Γ. L'équation (5) donne

$$\zeta = \zeta' - (z' - z)\, e^{-i\theta} . \tag{8}$$

En substituant cette valeur de ζ dans la condition (3) on trouve

$$dz' = i(z' - z)\, d\theta \tag{9}$$

et, par suite,

$$dz_0' = - i(z_0' - z_0)\, d\theta . \tag{9'}$$

Les équations (9) et (9′) donnent donc

$$\frac{dz'}{z' - z} + \frac{dz_0'}{z_0' - z_0} = 0 \tag{10}$$

ou

$$\frac{1}{z' - z}\frac{dz'}{dw} + \frac{1}{z_0' - z_0}\frac{dz_0'}{dw} = 0 . \tag{10'}$$

Cette relation *en termes finis* donne w en fonction de u. En intégrant ensuite la relation

$$i d\theta = \frac{dz'}{z' - z} \tag{11}$$

nous trouvons une fonction $\theta = \theta(u)$ effectivement réelle, car le second membre $\frac{dz'}{z' - z}$ est, en vertu de (10), une quantité imaginaire pure. Ensuite l'équation (8) détermine la roulante Γ, ζ étant une constante arbitraire (complexe).

5. — Proposons-nous de résoudre le *troisième problème: étant données la roulette* (7) *et la roulante* (2) *trouver la courbe base.* Dans ce cas nous déduisons des équations (5) et (3)

$$dz' = i(\zeta' - \zeta)e^{i\theta}\,d\theta \tag{12}$$

en même temps que la relation conjuguée

$$dz_0' = -\,i(\zeta_0' - \zeta_0)e^{-i\theta}\,d\theta\ . \tag{12'}$$

Ces deux équations nous donnent, d'abord, la relation (différentielle) entre les paramètres v, w et ensuite θ en fonction de l'un de ces deux paramètres. Nous pouvons opérer ainsi: écrivons

$$\left\{\begin{aligned} \sqrt{dz'\,dz_0'} &= \sqrt{(\zeta' - \zeta)(\zeta_0' - \zeta_0)}\,d\theta \\ \frac{dz'}{dz_0'} &= -\frac{\zeta' - \zeta}{\zeta_0' - \zeta_0}e^{2i\theta} \end{aligned}\right. \tag{13}$$

et éliminons θ; on obtient l'équation différentielle liant v et w:

$$d\log\left(\frac{dz'}{dz_0'}\right) + \frac{d\zeta}{\zeta' - \zeta} - \frac{d\zeta_0}{\zeta_0' - \zeta_0} = \frac{2i\sqrt{dz'\,dz_0'}}{\sqrt{(\zeta' - \zeta)(\zeta_0' - \zeta_0)}}\ . \tag{14}$$

La fonction $w(v)$ étant ainsi trouvée, nous obtenons θ par une quadrature et enfin l'équation

$$z = z' - (\zeta' - \zeta)e^{i\theta}$$

définit la courbe base cherchée.