

SUR LE ROULEMENT DES COURBES

Autor(en): **BUSCHEGUENNCE, M.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1937)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-28033>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR LE ROULEMENT DES COURBES

PAR

M. BUSCHEGUENNE (Moscou).

1. — Quand une courbe invariable Γ (dite *roulante*) roule sans glisser sur une courbe fixe donnée (dite *base*) C , un point fixe du plan de Γ parcourt la *roulette* C' . On sait que si l'on donne arbitrairement deux quelconques de ces trois courbes Γ , C , C' , la troisième est définie. Le roulement a été étudié en coordonnées ordinaires ou intrinsèques par HATON DE LA GOUPILLIÈRE¹ et divers autres géomètres.

Nous allons donner une solution du problème en utilisant la représentation des vecteurs dans un plan par des nombres complexes.

2. — La base C peut être représentée par l'équation rapportée à deux axes fixes Oxy

$$x + iy \equiv z = z(u) . \quad (1)$$

La courbe roulante Γ est définie par l'équation

$$\xi + i\eta \equiv \zeta = \zeta(\varrho) \quad (2)$$

rapportée à des axes rectangulaires $\bar{O}\xi\eta$ invariablement liés au plan mobile de cette courbe Γ .

Si la courbe Γ roule, sans glissement, sur la base C , ces deux courbes sont constamment tangentes en des points associés, de sorte que l'on a

$$dz = d\zeta e^{i\theta} , \quad (3)$$

¹ *Etude géométrique et dynamique des roulettes planes ou sphériques*. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

θ étant l'angle de rotation de l'axe mobile $\overline{O\xi}$, à savoir $\theta = (Ox, \overline{O\xi})$; désignons par \bar{z} le nombre complexe définissant l'origine mobile \overline{O} par rapport aux axes fixes. On a

$$z = \bar{z} + e^{i\theta} \zeta$$

ce que nous pouvons écrire

$$\bar{z} = z - e^{i\theta} \zeta \quad (4)$$

En prenant sur le plan mobile un point déterminé ζ' , ce point parcourt sur le plan fixe la roulette C' représentée, par rapport aux axes fixes, par l'équation

$$z' = \bar{z} + e^{i\theta} \zeta'$$

que nous pouvons, en vertu de (4), écrire

$$z' = z + (\zeta' - \zeta) e^{i\theta} \quad (5)$$

ou encore

$$z' = z + (\zeta' - \zeta) \frac{dz}{d\zeta} \quad (5')$$

Les équations (3) et (5) sont fondamentales pour toutes les considérations qui suivent.

3. — *En premier lieu*, supposons que l'on donne la base C et la roulante Γ représentées respectivement par les équations (1) et (2); soient z_0, ζ_0, \dots les nombres complexes conjugués respectivement de z, ζ, \dots

Il s'agit de déterminer la roulette.

En égalant les modules des deux membres de l'équation (3) on obtient la relation

$$\sqrt{dz dz_0} = \sqrt{d\zeta d\zeta_0} \quad (6)$$

ou

$$\sqrt{\frac{dz}{du} \frac{dz_0}{du}} du = \pm \sqrt{\frac{d\zeta}{d\nu} \frac{d\zeta_0}{d\nu}} d\nu \quad (6')$$

qui, tenant compte de la condition initiale, donne les points associés des courbes C et Γ ; le paramètre ν sera une fonction

déterminée de u et alors la roulette C' sera représentée par l'équation (5').

4. — Supposons, en *second lieu*, données la base C par l'équation (1) et la roulette C'

$$z' = z'(\omega) \tag{7}$$

rapportée, elle aussi, aux axes fixes; cherchons la roulante Γ . L'équation (5) donne

$$\zeta = \zeta' - (z' - z) e^{-i\theta} . \tag{8}$$

En substituant cette valeur de ζ dans la condition (3) on trouve

$$dz' = i(z' - z) d\theta \tag{9}$$

et, par suite,

$$dz'_0 = -i(z'_0 - z_0) d\theta . \tag{9'}$$

Les équations (9) et (9') donnent donc

$$\frac{dz'}{z' - z} + \frac{dz'_0}{z'_0 - z_0} = 0 \tag{10}$$

ou

$$\frac{1}{z' - z} \frac{dz'}{d\omega} + \frac{1}{z'_0 - z_0} \frac{dz'_0}{d\omega} = 0 . \tag{10'}$$

Cette relation *en termes finis* donne ω en fonction de u . En intégrant ensuite la relation

$$i d\theta = \frac{dz'}{z' - z} \tag{11}$$

nous trouvons une fonction $\theta = \theta(u)$ effectivement réelle, car le second membre $\frac{dz'}{z' - z}$ est, en vertu de (10), une quantité imaginaire pure. Ensuite l'équation (8) détermine la roulante Γ , ζ étant une constante arbitraire (complexe).

5. — Proposons-nous de résoudre le *troisième problème*: étant données la roulette (7) et la roulante (2) trouver la courbe base. Dans ce cas nous déduisons des équations (5) et (3)

$$dz' = i(\zeta' - \zeta) e^{i\theta} d\theta \quad (12)$$

en même temps que la relation conjuguée

$$dz'_0 = -i(\zeta'_0 - \zeta_0) e^{-i\theta} d\theta. \quad (12')$$

Ces deux équations nous donnent, d'abord, la relation (différentielle) entre les paramètres ν , ω et ensuite θ en fonction de l'un de ces deux paramètres. Nous pouvons opérer ainsi: écrivons

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{dz' dz'_0} = \sqrt{(\zeta' - \zeta)(\zeta'_0 - \zeta_0)} d\theta \\ \frac{dz'}{dz'_0} = -\frac{\zeta' - \zeta}{\zeta'_0 - \zeta_0} e^{2i\theta} \end{array} \right. \quad (13)$$

et éliminons θ ; on obtient l'équation différentielle liant ν et ω :

$$d \log \left(\frac{dz'}{dz'_0} \right) + \frac{d\zeta}{\zeta' - \zeta} - \frac{d\zeta_0}{\zeta'_0 - \zeta_0} = \frac{2i \sqrt{dz' dz'_0}}{\sqrt{(\zeta' - \zeta)(\zeta'_0 - \zeta_0)}}. \quad (14)$$

La fonction $\omega(\nu)$ étant ainsi trouvée, nous obtenons θ par une quadrature et enfin l'équation

$$z = z' - (\zeta' - \zeta) e^{i\theta}$$

définit la courbe base cherchée.