

LA COURBE DE L'HÔPITAL

Autor(en): **Turrière, E.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1937)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-28032>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

circulaires réelles du plan, et donner leurs propriétés essentielles. Les résultats obtenus en ce qui concerne les « décompositions canoniques » en produits d'inversion sont résumés par les schémas de la figure 20. [Les pôles sont marqués par de gros points; l'inversion simple I est représentée par un cercle en trait gras, car tous les points de ce cercle sont doubles; pour distinguer Γ de son inverse, il faut numéroter 1 et 2 les deux cercles correspondant à une même transformation simple composante.]

Le tableau page 177 résume l'ensemble des propriétés invariantes des différents types Γ .

En terminant remarquons que toute la théorie précédente s'applique aux transformations circulaires sur la surface d'une sphère. (Bien entendu, il n'y a plus de foyers à considérer.)

LA COURBE DE L'HÔPITAL

PAR

E. TURRIÈRE (Montpellier).

1. — LA COURBE DE PRESSION CONSTANTE.

La question de la courbe plane de pression constante pour le mouvement sur elle, sans frottement, du point pesant, a été nettement posée par Jean BERNOULLI dans une lettre adressée à LEIBNIZ ¹ en janvier 1695 (*curva aequabilis pressionis*) et dans une seconde lettre, encore adressée à LEIBNIZ, en février 1696; Jean BERNOULLI indiqua l'équivalence du problème et de celui du pendule à fil de tension constante. Il signala, sans explications ni calculs, que la courbe peut être algébrique ou transcendante. Il reposa une troisième fois les mêmes questions dans une pièce des *Acta eruditorum* de 1696 ².

¹ G. G. LEIBNITZ et Joh. BERNOULLI, *Commercium, philosophicum et mathematicum*, I, p. 30 et 134.

² *Acta eruditorum* (Supplementa, t. II), 1696, p. 291.

Mais le problème ne fut résolu qu'en 1700, par le marquis de l'Hôpital, qui donna l'équation et quelques propriétés de la courbe dans le cas où elle est algébrique, c'est-à-dire lorsque la pression reste égale au poids du point matériel et qui se borna à indiquer que, dans le cas général, la courbe est transcendante; lorsque la pression est inférieure au poids, la transcendence est due à la présence de fonctions logarithmiques; lorsque la pression est supérieure au poids, les fonctions transcendentes introduites sont des fonctions circulaires.

L'HÔPITAL¹ donna, à la similitude près, l'équation suivante de la courbe à pression constante

$$5x = 2(y - \sqrt{y} - 1) \cdot \sqrt{2\sqrt{y} - 1} ;$$

l'axe Oy étant, dans sa figure, la verticale descendante. Il suffit de poser

$$y = \frac{(1 + \lambda^2)^2}{4} ,$$

dans cette équation, pour obtenir les expressions paramétriques de la quintique.

Cette courbe, qui a l'allure d'un folium à branches paraboliques, n'est autre que la courbe du *looping the loop*.

Enfin, M. L. LECORNU² a repris, en 1903, l'étude de la courbe à pression constante et il a montré que le mouvement sur l'hodographe était le mouvement képlérien des planètes.

2. — ÉTUDE DE LA PRESSION DANS LE MOUVEMENT SANS FROTTEMENT DU POINT PESANT SUR UNE COURBE PLANE SITUÉE DANS UN PLAN VERTICAL.

L'axe Oy étant la verticale ascendante, l'intégrale des forces vives est tout d'abord

$$v^2 + 2gy = v_0^2 ;$$

v_0 est la vitesse au sommet (la vitesse minima).

¹ DE L'HÔPITAL, Solution d'un problème physico-mathématique. *Mémoires de mathématique et de physique tirés des registres de l'Académie royale des Sciences* (Paris) de 1700, p. 9-21.

Histoire de l'Académie royale des Sciences, 1700, p. 78-87.

P. JULLIEN, *Exercices de Mécanique*, t. I, 1886, p. 406.

A. DE SAINT-GERMAIN, *Recueil d'exercices de Mécanique rationnelle*, 1889, p. 285-289.

GINO LORIA, *Curve piane speciali algebriche e trascendenti*, t. II, 1936, p. 164.

² L. LECORNU, *Bulletin de la Société mathématique de France*, 16 décembre 1903.

Cours de Mécanique, t. I, 1914, p. 337-341.

Soit α l'inclinaison sur l'horizontale Ox de la tangente à la courbe au point considéré; soit mgN la réaction normale. L'équation intrinsèque

$$\frac{m\varphi^2}{\rho} = mgN - m g \cos \alpha ,$$

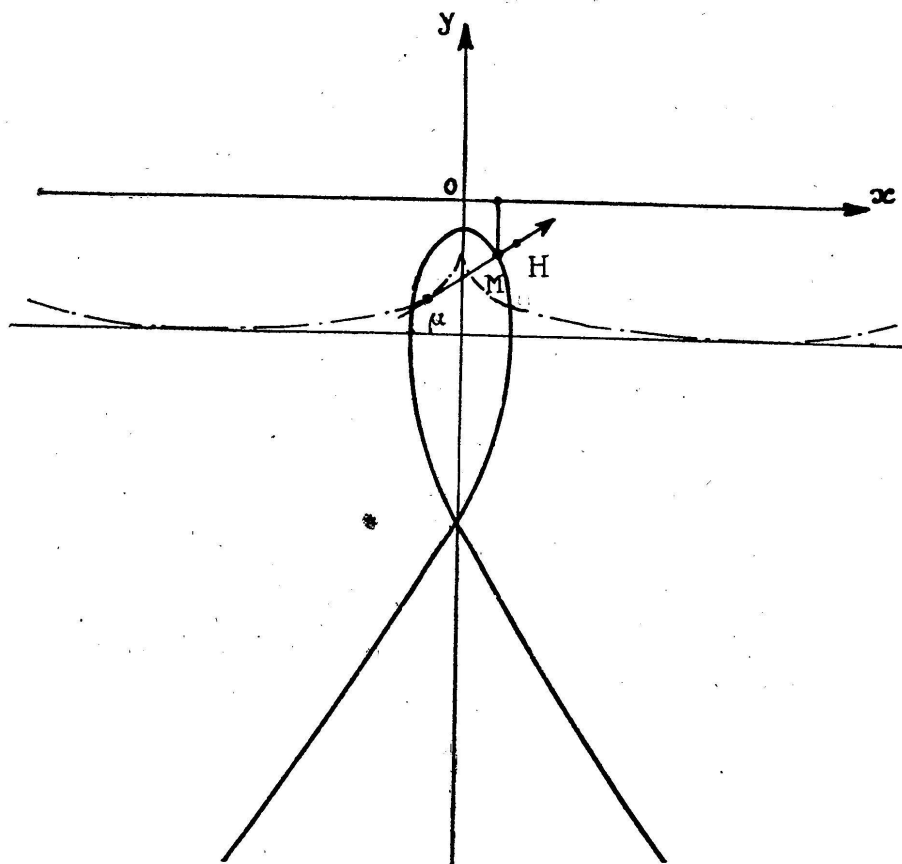
donne l'expression de N :

$$N = \cos \alpha + \frac{\varphi^2}{g\rho} ,$$

en fonction de la vitesse φ , de l'angle α et du rayon de courbure ρ de la courbe.

Prenons pour axe Ox la droite qui permet de mettre l'intégrale des forces vives sous la forme réduite suivante:

$$\varphi^2 + 2gy = 0 ;$$



la vitesse serait théoriquement nulle aux points de rencontre de la courbe et de cet axe Ox , qui est donc une *directrice* de la courbe.

L'ordonnée y de tout point de l'arc utile de la courbe est

nécessairement négative ($y \leq 0$). L'expression de la réaction prend ainsi la forme

$$N = \cos \alpha - \frac{2y}{\rho} .$$

(N est ici le rapport de la réaction au poids). Cette formule est explicitement donnée par L'HÔPITAL, qui la prend précisément pour départ de la solution du problème de BERNOULLI.

Nous ferons observer que cette formule générale pour la réaction normale s'écrit aussi sous la forme suivante

$$N = \frac{1}{\rho} (y_{\mu} - 3y) ,$$

en introduisant l'ordonnée y_{μ} du centre de courbure μ associé au point M :

$$y_{\mu} - y = \rho \cos \alpha .$$

Prenons encore, sur la normale en M, un point H situé de l'autre côté de M que le centre de courbure μ et tel que

$$\frac{MH}{M\mu} = -\frac{1}{2} .$$

Le point que j'ai nommé l'*orthocentre-limite* dans l'étude du triangle évanouissant formé par trois tangentes infiniment voisines d'une courbe¹ est précisément le point H ainsi défini.

Soit H_1 la projection orthogonale de l'orthocentre-limite H sur l'axe Ox des points où la vitesse serait nulle.

La formule générale de la pression (mgN) devient :

$$N = \frac{2}{\rho} \cdot HH_1 .$$

J'en ai indiqué une application immédiate au mouvement parabolique, dans le mémoire cité.

¹ E. TURRIÈRE, SUR UN CAS DE DÉGÉNÉRESCENCE DE LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE. *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. LXIII, 1935, p. 211-226 (paragraphe 6, p. 218).

3. — ÉTUDE DE LA DÉRIVÉE DE LA PRESSION.

Partant des formules

$$v^2 + 2gy = v_0^2, \quad N = \cos \alpha + \frac{v^2}{g\rho},$$

nous obtenons par dérivations

$$v \frac{dv}{d\alpha} + g\rho \sin \alpha = 0,$$

$$\frac{dN}{d\alpha} = -\sin \alpha + \frac{2v \, dv}{g\rho} - \frac{v^2}{g\rho^2} \frac{d\rho}{d\alpha},$$

$$\frac{dN}{d\alpha} = \frac{3v}{g\rho} \frac{dv}{d\alpha} - \frac{v^2}{g\rho^2} \frac{d\rho}{d\alpha};$$

d'où finalement:

$$g\rho \cdot \frac{dN}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{v^3}{\rho} \right).$$

Mais

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha} = v \cdot \frac{dt}{d\alpha}, \quad \frac{v^3}{\rho} = v^2 \frac{d\alpha}{dt}$$

et, par suite aussi:

$$g\rho \cdot \frac{dN}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \left[v^2 \frac{d\alpha}{dt} \right].$$

v et α sont précisément les coordonnées polaires du point qui accompagne le point M et qui définit, par le lieu des positions successives qu'il occupe, l'*hodographe* du mouvement ¹.

Dire que le mouvement sur l'*hodographe* de Hamilton est effectué suivant la loi des aires c'est interpréter la condition

$$v^2 \frac{d\alpha}{dt} = \text{constante}.$$

¹ HAMILTON, le premier, appela l'attention sur l'intérêt présenté par l'*hodographe*. Il a mis en évidence la propriété des mouvements célestes d'être représentés par des *hodographes* circulaires.

Plus récemment, G. DARBOUX tira parti de l'*hodographe* pour écrire élégamment les équations relatives aux trois intégrales de Laplace.

Sur les trois intégrales de Laplace, *Bulletin astronomique*, 1886, t. V, p. 89.

Voir aussi: F. TISSERAND, *Traité de Mécanique céleste*, t. I, p. 121.

G. SCHOUTEN, *Nieuw Archief vor Wiskunde*, 1876, t. II, p. 76-96.

Et, par suite, la formule précédente conduit à mettre en évidence les courbes à pression constante par le théorème suivant:

Si, dans le mouvement sans frottement d'un point pesant sur une courbe plane, la pression est constante, le mouvement sur l'hodographe est effectué suivant la loi des aires et réciproquement.

Dans ce cas ($N = \text{const}$), la vitesse satisfait aux équations suivantes:

$$\begin{aligned} v^3 &= C\rho . \\ v &= \frac{C}{g} \cdot \frac{1}{N - \cos \alpha} ; \end{aligned}$$

cette dernière relation exprime que, dans le mouvement du point pesant sur la courbe de pression constante, l'hodographe est une conique de foyer O.

L'excentricité de la conique est:

$$e = \frac{1}{N} = \frac{\text{poids du point matériel}}{\text{pression constante}} .$$

L'hodographe sera une hyperbole, une parabole ou une ellipse suivant que la pression sera inférieure, égale ou supérieure au poids du point matériel.

Si la pression constante est supérieure au poids du point matériel, l'hodographe du mouvement est une ellipse, parcourue suivant la loi du mouvement képlérien des planètes.

4. — ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA COURBE À PRESSION CONSTANTE.

Si l'équation de la tangente courante est mise sous la forme $x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varpi$, les expressions des coordonnées du point courant d'une courbe semblable à la courbe de pression constante sont

$$x = -2 \int \frac{\sin \varphi d\varphi}{(a + \sin \varphi)^3}, \quad y = \frac{-1}{(a + \sin \varphi)^2} .$$

a n'est autre ici que le rapport N de la pression au poids ($a > 0$). L'expression du rayon de courbure ρ en fonction de φ est:

$$\rho = \frac{2}{(a + \sin \varphi)^3} = 2|y|^{3/2}.$$

La courbe ne présente aucune inflexion.

La loi du mouvement est:

$$t = \sqrt{2} \int \frac{d\varphi}{(a + \sin \varphi)^2},$$

l'hodographe étant une conique de foyer O , d'excentricité $\frac{1}{a}$, décrite suivant la loi du mouvement d'une planète.

On a en outre:

$$\frac{1}{2}x = a \int \frac{d\varphi}{(a + \sin \varphi)^3} - \int \frac{d\varphi}{(a + \sin \varphi)^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = -\cotg \varphi, \quad \frac{dx}{d\varphi} = -\rho \sin \varphi, \quad \frac{dg}{d\varphi} = \rho \cos \varphi.$$

La courbe admet un axe vertical de symétrie (changer φ en $-\varphi$); elle n'a pas d'inflexion à distance finie.

L'intégrale

$$I_n = \int \frac{dx}{(a + \sin x)^n}$$

satisfait à la relation de récurrence suivante:

$$(n + 1)(1 - a^2)I_{n+2} + a(2n + 1)I_{n+1} - nI_n = -\frac{\cos x}{(a + \sin x)^{n+2}}$$

$$I_0 = x$$

$$(a^2 - 1)I_2 = aI_1 + \frac{\cos x}{a + \sin x}$$

$$2(a^2 - 1)I_3 = 3aI_2 - I_1 + \frac{\cos x}{(a + \sin x)^2}$$

d'où l'expression de l'abscisse x :

$$(a^2 - 1)^2 x = 3a \cdot I_1 + \frac{\cos \varphi}{(a + \sin \varphi)^2} [a(2a^2 + 1) + (a^2 + 2) \sin \varphi]$$

Quant à ω , distance de O à la tangente courante, cette fonction de φ a pour expression :

$$\omega = -\cos \varphi \int \frac{1}{(a + \sin \varphi)^2} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Ainsi que l'avaient indiqué Bernoulli et reconnu DE L'HÔPITAL, la courbe s'étudie soit au moyen des fonctions trigonométriques, soit au moyen de la fonction logarithmique. Deux formes distinctes en découlent pour la courbe, qui est soit un ovale, soit une courbe à branches paraboliques. La courbe algébrique de L'HÔPITAL est intermédiaire entre les deux types de courbes transcendantes.

5. — LA COURBE DE L'HÔPITAL.

Dans un précédent article ¹ sur diverses courbes algébriques, j'ai mentionné cette intéressante courbe unicursale du cinquième degré, qui est une courbe de direction. Ses équations, à un facteur près de similitude, sont

$$x = 2\left(u - \frac{u^5}{5}\right), \quad y = -(1 + u^2)^2 < 0,$$

$$s = 2u + \frac{4}{3}u^3 + \frac{2}{5}u^5.$$

$$\rho = (1 + u^2)^3, \quad \rho = |y|^{\frac{3}{2}}.$$

Les équations respectives de la tangente et de la normale au point courant sont :

$$2uX + (1 - u^2)Y = \frac{u^6}{5} + u^4 + 3u^2 - 1;$$

$$(1 - u^2)X - 2uY = 2u\left(\frac{1}{5}u^6 + \frac{4}{5}u^4 + u^2 + 2\right).$$

La courbe a la forme d'un folium, sans asymptote. Elle admet un point double sur l'axe de symétrie Oy, $x = 0$,

¹ Notes sur des courbes spéciales algébriques. *Anais da Faculdade de Ciencias do Porto*, t. XX, 1936.

$y = -2(3 + \sqrt{5}) = -10,47$; ainsi qu'un point isolé intérieur à la courbe: $x = 0, y = -2(3 - \sqrt{5}) = -1,528$.

Elle admet un foyer $F(x = 0, y = -\frac{8}{5})$ auquel est associée la directrice Ox . L'équation focale entre le rayon vecteur $r = FM$ du foyer et la distance D du point M à la directrice est:

$$25r^2 = D^2(4\sqrt{D} + 5).$$

D'où résulte l'équation de la courbe:

$$(25x^2 + 20y^2 + 80y + 64)^2 + 16y^5 = 0.$$

En introduisant l'angle α d'inclinaison de la tangente au point courant sur l'horizontale

$$u = -\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2},$$

l'expression de la courbure devient:

$$\frac{1}{\rho} = \cos^6 \frac{\alpha}{2}.$$

La développée est représentée par les équations:

$$\xi = -4u^3 \left(1 + \frac{3}{5}u^2\right),$$

$$\eta = u^6 - 3u^2 - 2 = (u^2 + 1)^2(u^2 - 2);$$

le rayon ρ' de courbure de la développée a pour expression:

$$\begin{aligned} \rho' &= 3u(u^2 + 1)^3 \\ &= 3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \times \frac{1}{\cos^6 \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

6. — MOUVEMENT D'UN POINT PESANT SUR LA COURBE DE L'HÔPITAL.

Soit v_0 la vitesse au sommet de la courbe. Posons

$$v_0^2 = 2gh, \quad h > 0.$$

L'équation du mouvement sur la courbe est :

$$\sqrt{\frac{g}{2}} t = \int_0^u \frac{(1 + u^2)^2}{\sqrt{u^4 + 2u^2 + h}} du ;$$

la pression est

$$N = 1 + 2 \frac{h - 1}{\rho} .$$

Dans le cas, $h = 1$, $v_0 = \sqrt{2g}$, $N = 1$. La pression pour cette valeur particulière de la vitesse initiale est bien constante et elle reste égale au poids.

La loi du mouvement est alors :

$$\sqrt{\frac{g}{2}} t = u + \frac{u^3}{3} ,$$

comme dans le cas du mouvement parabolique des comètes. L'hodographe est, en effet, dans le cas $N = 1$, une parabole de foyer O.

7. — DE LA QUADRATURE DE LA RADIALE DE TUCKER.

De l'Hôpital donne la longueur d'un arc de la quintique, ainsi que l'expression de l'aire qu'elle délimite. Il évalue l'aire comprise entre la courbe, sa développée, l'axe de symétrie et une normale courante: en d'autres termes, *l'aire balayée par le rayon de courbure dans le déplacement du point depuis le sommet $u = 0$ jusqu'à une position quelconque u .*

En observant que cette aire Σ est constituée par des triangles élémentaires ayant leurs sommets aux centres de courbure et ayant pour bases les arcs infiniment petits de la courbe, c'est-à-dire ayant pour aire

$$d\Sigma = \frac{1}{2} \rho^2 d\alpha ,$$

(à des infiniment petits près d'ordre supérieur), il est manifeste que, d'une manière générale, pour une courbe plane quelconque,

le quadrilatère mixtiligne envisagé a pour aire l'expression suivante :

$$\Sigma = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \rho^2 d\alpha ;$$

les limites α_1 et α_2 de l'intégrale correspondent aux inclinaisons sur la verticale des deux normales limitant l'aire Σ considérée.

Σ est donc l'aire de la radiale (ρ, α) de la courbe.

Dans le cas de la courbe de L'HÔPITAL, la radiale de TUCKER a pour équation polaire

$$\rho \cos^6 \frac{\alpha}{2} = 1 .$$

$$2\Sigma = \int \frac{d\alpha}{\cos^{12} \frac{\alpha}{2}} = 2 \int_0^u (1 + u^2)^6 \cdot \frac{du}{1 + u^2} ,$$

$$\Sigma = \int_0^u (1 + u)^5 du ;$$

d'où l'expression entière en u de Σ , correspondant à celle trouvée par de L'HÔPITAL.

8. — RELATIONS AVEC LES COURBES DE RIBAUOUR.

La courbe à pression constante satisfait à la condition

$$A\rho = |y|^{\frac{3}{2}} . \quad (A = \text{const.})$$

De leur côté les *courbes de Ribaucour* satisfont à une relation plus générale

$$y^\lambda = A\rho .$$

En général

$$\frac{dy}{d\alpha} = \rho \sin \alpha ;$$

et, par suite, la condition précédente se met sous la forme:

$$\sin \alpha d\alpha = Ay^{-\lambda} dy ;$$

d'où:

$$\frac{Ay^{1-\lambda}}{1-\lambda} + \cos \alpha = \text{const} ;$$

c'est-à-dire

$$y = B \cdot (\cos \alpha + h)^{\frac{1}{1-\lambda}} .$$

Pour $h = 0$, nous retrouvons les courbes de Ribaucour; pour $\lambda = \frac{3}{2}$, les courbes de pression constante. Les deux familles de courbes ont en commun les paraboles de directrice Ox . Jean BERNOULLI et le marquis DE L'HÔPITAL avaient signalé la propriété des trajectoires balistiques du point pesant de pouvoir être considérées comme des courbes particulières à pression constante.

9. — L'IMAGE DE COURBURE DE MINKOWSKI.

Une courbe plane (C) étant définie par sa tangente

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varpi$$

et son rayon de courbure ρ ayant l'expression

$$\rho = \varpi + \frac{d^2 \varpi}{d\varphi^2} ,$$

l'image de courbure¹ de Minkowski de cette courbe (« Das Minkowskische Krümmungsbild ») est, par définition, l'enveloppe de la droite

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \rho - \frac{1}{3} .$$

¹ BÖLMEER, Ueber elliptisch-konvexe Ovale. *Mathematische Annalen*, LX, p. 256-262
H. MOHRMANN, Ueber beständig hyperbolisch gekrümmte Kurvenstücke. *Math. Annalen*, LXXII, 1912, p. 593-595.

Le rayon de courbure de l'image de courbure est donc ρ_1

$$\rho_1 = \frac{1}{9} \rho^{-\frac{7}{3}} (9\rho^2 - 3\rho\rho'' + 4\rho'^2),$$

ρ' et ρ'' désignant les dérivées première et seconde de $\rho(\varphi)$.

L'image se réduit à un point lorsque la courbe (C) est une parabole ($\rho_1 = 0$).

Dans le cas de la courbe d'égle pression, l'image de courbure de Minkowski de cette courbe est l'enveloppe d'une droite d'équation

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = k(a + \sin \varphi);$$

l'image est ainsi une *circonférence*. Cet exemple est de ceux qui illustrent le mieux la théorie des images de la courbure.

10. — MOUVEMENTS D'UN POINT MATÉRIEL, DANS LE PLAN, SUIVANT LA LOI DES AIRES SUR L'HODOGRAPHE.

L'étude de la courbe de pression constante dans le mouvement du point pesant pose la question des mouvements avec loi des aires sur l'hodographe.

La condition est:

$$v^2 \frac{d\alpha}{dt} = C = \text{constante}.$$

avec ses formes équivalentes:

$$v^3 = C \cdot \rho, \quad \rho^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^3 = \text{const},$$

d'où la loi du temps correspondante:

$$nt = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \rho^{\frac{2}{3}} d\alpha;$$

n est une constante. Cette intégration est donc attachée simplement à l'équation naturelle de la courbe trajectoire du point matériel, et à sa radiale de Tücker.

Si la radiale est représentée par l'équation polaire

$$\rho = f(\alpha) ,$$

l'hodographe du mouvement a, dans le cas actuel, pour équation polaire

$$r^3 = C \cdot f(\alpha) .$$

Les deux courbes, la radiale et l'hodographe, se correspondent par une transformation ponctuelle sur le rayon vecteur:

$$r^3 = C \cdot \rho .$$

Exemples. — 1° Correspondance entre cercles concentriques.
2° A une parabole de foyer O, dont la radiale est la courbe

$$\rho \cos^3 \alpha = a ,$$

correspond l'hodographe d'équation polaire:

$$r \cos \theta = \text{const} ,$$

c'est-à-dire une droite.

3° A une conique de foyer O

$$\rho = p(1 - e^2 \cos^2 \alpha)^{-\frac{3}{2}}$$

correspond un hodographe qui est une conique de centre O:

$$r \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta} = \text{const} ;$$

$$x^2(1 - e^2) - y^2 = \text{const} .$$

4° A la spirale logarithmique d'équation naturelle

$$\rho = ae^{m\alpha}$$

correspond l'hodographe

$$r = be^{\frac{1}{3}m\theta} ,$$

qui est une nouvelle spirale logarithmique.

5° A l'hypocycloïde à trois rebroussements

$$\rho = a \sin 3\alpha ,$$

correspond l'hodographe d'équation polaire

$$r^3 = A \sin 3\alpha ;$$

C'est la cubique de Tschirnhausen, caustique de parabole, inverse d'orthogénide.

6° La spirale d'Archimède est l'hodographe associé ainsi à une trajectoire d'équation naturelle

$$\rho = \alpha^3 \times \text{const} ,$$

c'est-à-dire à une développante supérieure de cercle.

7° A la chaînette

$$\rho \cos^2 \alpha = a ,$$

correspond l'hodographe:

$$r \cos^{\frac{2}{3}} \theta = \text{const} .$$

11. — PENDULE À TENSION CONSTANTE.

Déterminer la courbe Γ sur laquelle il faut enrouler le fil qui soutient le pendule simple restant dans un plan vertical, pour que la tension du fil soit constante.

La courbe (Γ) est évidemment la développée d'une courbe à pression constante pour le mouvement du point pesant.

L'équation *naturelle* de la courbe à pression constante est:

$$\rho = \frac{2A}{(\cos \alpha - N)^3} ;$$

en dérivant, on obtient l'équation naturelle de la courbe du pendule à tension constante:

$$\rho = \frac{B \sin \alpha}{(\cos \alpha - N)^4} .$$

Dans le cas de la courbe algébrique de l'Hôpital ($N = 1$), l'équation naturelle de la développée est :

$$\rho = \frac{3}{\cos^6 \frac{\alpha}{2}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} .$$

12. — CONCLUSION.

Du point de vue historique, le problème de Jean Bernoulli marque une date pour la découverte des principes de la dynamique du point matériel en mouvement sur une courbe imposée.

Jean Bernoulli n'a publié aucune solution; Leibniz n'a donné aucune réponse. Huygens avait, à la vérité, à la fin de son *De Horologio oscillatorio*, indiqué quelques propriétés, mais sans démonstrations. « Il s'était contenté de faire voir qu'il savait le secret des forces centrifuges, mais il ne l'avait pas voulu découvrir. C'était une espèce d'énigme qu'il avait proposée aux plus habiles géomètres; l'illustre Newton en avait deviné une partie... »¹.

Les difficultés furent vaincues par l'Hôpital, qui détermina la relation entre la réaction, la courbure et la hauteur de chute équivalente pour la vitesse acquise.

Le Mémoire de l'Hôpital, sous ce point de vue, est plus important que la solution même du problème auquel il est consacré.

¹ *Histoire de l'Académie royale des Sciences*, 1700, p. 80.