

Chapitre I. — Définitions et théorèmes généraux.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1937)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

translation; d'une figure à une autre inversement égale, par un *retournement*, qui se réduit à une symétrie autour d'une droite, suivie d'une translation parallèle à cette droite.

CHAPITRE I. — DÉFINITIONS ET THÉORÈMES GÉNÉRAUX.

§ 2. — *Définition.* — Une transformation ponctuelle réelle, biunivoque, et continue, du plan sera dite circulaire si elle transforme un cercle quelconque en un autre cercle. Dans cette définition le mot « cercle » désigne une circonférence proprement dite ou une droite.

Exemple: une inversion, un produit d'inversions et de similitudes.

Les transformations circulaires du plan forment un groupe. Evident.

THÉORÈME I. — *Si une transformation circulaire Γ est définie pour tous les points du plan euclidien, elle se réduit à une similitude.*

Soit en effet A' le transformé d'un point quelconque A ; D'_1 et D'_2 deux droites passant par A' . Les cercles D_1 et D_2 qui ont D'_1 et D'_2 pour homologues se coupent en A et en un autre point $\bar{A}$, qui ne peut avoir d'homologue $\bar{A}'$, car ce point $\bar{A}'$ devrait être commun à D'_1 et D'_2 , tout en étant distinct de A' . Donc D_1 et D_2 sont nécessairement des droites.

Par suite, les droites de la figure F' sont les transformées des droites de F ; Γ est donc une homographie. Comme elle transforme les cercles en cercles, c'est une similitude.

Corollaire. — *Si Γ ne se réduit pas à une similitude, il existe au moins un point Φ du plan pour lequel elle n'est pas définie.*

Le raisonnement qui précède montre que les cercles passant par un tel point Φ sont transformés en droites. Nous allons montrer qu'il n'existe qu'un point Φ , c'est-à-dire que:

THÉORÈME II. — *Une transformation circulaire proprement dite Γ étant donnée, il existe dans le plan un point Φ et un seul tel que tous les cercles passant par Φ soient transformés en droites.*

En effet, s'il existait deux points singuliers de ce genre Φ_1 et Φ_2 , on pourrait prendre des couples de cercles C_1 et C_2 passant

respectivement par Φ_1 et Φ_2 , se coupant en A et B. Γ serait définie pour A et B, et transformerait (C_1) et (C_2) en deux droites (C'_1) et (C'_2) qui devraient se couper en deux points distincts A' et B', ce qui est absurde. Il existe donc un point Φ et un seul.

Le point Φ sera dit *foyer-objet* de la transformation Γ .

THÉORÈME III. — *Il existe dans le plan un point Ψ et un seul tel que les cercles transformés de toutes les droites du plan passent par Ψ .*

Le point Ψ sera le *foyer-image* de Γ .

Ce théorème se démontre d'une manière analogue au théorème II. Ou encore, il résulte de l'application du théorème II à la transformation Γ^{-1} inverse de Γ . Il résulte aussi des propriétés que nous allons donner maintenant et qui découlent elles-mêmes, si l'on veut, du seul théorème II.

§ 3. — THÉORÈME IV. — *Toute transformation circulaire proprement dite Γ est le produit d'une inversion par une égalité (déplacement ou retournement).*

Soit en effet I une inversion de pôle Φ et de puissance arbitraire. Soit F la figure primitive, F' la transformée par Γ , F_0 par I. On passe de F_0 à F' par une transformation circulaire, produit de I par Γ , qui se réduit à une similitude Σ , car les droites de F' correspondent aux cercles de F passant par Φ , et de même les droites de F_0 .

Donc $F' = F_0 \cdot \Sigma$ et $\Gamma = I\Sigma$

En choisissant convenablement la puissance de l'inversion I, on a

$$\boxed{\Gamma = I\Delta} \quad (1)$$

Δ étant soit un déplacement $\mathcal{O}$, soit un retournement D.

Corollaire. — Les transformations Γ conservent les angles (en grandeur).

Elles se divisent en deux classes: la première, celle des *transformations circulaires directes*

$$\boxed{c = ID} \quad , \quad (2)$$

où D est un retournement, conserve les angles en grandeur et en signe. La deuxième conserve les angles en grandeur, mais change leur signe: c'est celle des *transformations circulaires inverses*:

$$\boxed{C = I\mathcal{O}} \quad , \quad (3)$$

où $\mathcal{O}$ est un déplacement.

Chacune de ces deux familles est à 6 paramètres: 3 pour l'inversion, 3 pour le déplacement ou le retournement.

Les $\mathcal{C}$ forment un groupe; les C non.

Point à l'infini du plan. — C'est un point impropre ∞ défini comme étant commun à toutes les droites du plan. Une droite est un cercle qui passe par ∞ . Une transformation Γ transforme son foyer-objet Φ en ∞ , et transforme ∞ en son foyer-image Ψ . Elle est donc *définie et biunivoque pour tous les points du plan ainsi étendu par l'adjonction du point impropre ∞* .

CHAPITRE II. — GROUPE DES TRANSFORMATIONS CIRCULAIRES DIRECTES.

§ 4. — La transformation générale $\mathcal{C} = ID$ est définie par un cercle (I) de centre Φ (cercle d'inversion) et un vecteur $\vec{D}$ de retournement. Le foyer image Ψ est le transformé de Φ par le retournement D . Les éléments géométriques conservés dans l'inversion I subissent simplement le retournement: tel est le cas du cercle (I) et des cercles orthogonaux à celui-là, en particulier des droites passant par Φ , qui sont *les seules droites du plan transformées en droites par $\mathcal{C}$* .

Soit P le point où une droite (L) passant par Φ coupe son homologue (L') (qui passe naturellement par Ψ) (fig. 1); quand (L) tourne autour de Φ , P décrit une hyperbole équilatère (H) passant par Φ et Ψ , et admettant comme asymptotes la droite (D) et la perpendiculaire (Δ) menée à (D) au milieu O de $\Phi\Psi$. (L) et (L') découpent sur (D) et (Δ) deux segments constants

$$\overrightarrow{dd'} = \vec{D} \quad , \quad \overrightarrow{\delta\delta'} = \overrightarrow{\Phi\phi} \quad .$$