2. — Composition.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1937)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

2. — Composition.

Si nous composons n'importe quel élément du groupe avec n'importe quel autre, nous obtenons un produit qui est encore un élément du groupe (égalité par addition ou soustraction). La règle de composition est donc définie par l'addition membre à membre des égalités qui constituent les éléments.

I. Commençons par composer entre eux les éléments a, b, c, ..., etc.

$$\begin{array}{ll} (a) & A + A' = B \\ (b) & B + B' = C \\ \hline (p) & A + B + A' + B' = B + C \,, \end{array} \qquad \text{d'où} \qquad A + (A' + B') = C \,.$$

Cette composition constitue le principe du syllogisme ($A < B$, $B < C$, donc $A < C$), qui peut s'écrire

$$A = B - A' \,, \quad B = C - C' \,, \quad \text{donc} \quad A = C - (A' + B') \,.$$

De même, $(a) + (c)$ donne $A + (A' + B' + C') = D$ ou $A = D - (A' + B' + C')$, etc.

II. Eléments a' b' c':

$$\begin{array}{ll} (a') & B - A' = A \,, \\ (b') & C - B' = B \,, \\ \hline (p) & C - (A' + B') = A \,. \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ll} (a') & B - A' = A \,, \\ (c') & D - C' = C \,, \\ \hline & D - C' + B - A' = A + C \,, \\ \text{or} & B = C - B' \,, \\ \text{d'où} & D - (C' + B' + A') = A \,. \end{array}$$

etc.

III. Eléments a, b, c, ... et a', b', c', ...

$$\begin{array}{ll} (a) & A + A' = B \,, \\ (c') & D - C' = C \,, \\ \hline & A + D + A' - C' = C + B \,, \\ \text{d'où} & D = C + C' \,. \end{array} \qquad \begin{array}{ll} (a') & B - A' = A \,, \\ (c) & B + B' = C \,, \\ \hline & B + B + B' - A' = A + C \,, \\ \text{d'où} & B = C - B' \,. \end{array}$$

IV. Classes négatives

$$
\begin{array}{l}
(a'')\ -A-A' = -B \\
(b'')\ \underline{-B-B' = -C} \\
\quad -A-B-A'-B' = -B-C,
\end{array}
\quad \text{d'où} \quad -A-(A'+B') = -C,
$$

et

$$
\begin{array}{ll}
(b)\ B+B' = C & \qquad (b)\ B+B' = C \\
\quad \underline{A-B = -A'} & \qquad \quad \underline{C-D = -C'} \\
\quad A+B-B+B' = C-A', & \qquad \quad B+C+B'-D = C-C', \\
\quad A+B' = C-A'. & \qquad \text{d'où} \quad B+B' = D-C'.
\end{array}
$$

V. On peut enfin additionner ou soustraire les A′, B′, C′, etc. entre eux. On peut poser (par définition)

$$
\begin{array}{lcl}
A'+B' = C-A, & & A'-B' = C-A-B'-B', \\
B'+C' = D-B, & \text{et} & B'-C' = D-B-C'-C', \\
C'-D' = E-C. & & C'-D' = E-C-D'-D'. \\
\quad \ldots,\ \text{etc.} & & \quad \ldots,\ \text{etc.}
\end{array}
$$

d'où les compositions suivantes

$$
\begin{array}{l}
(a)\ A+A' = B \\
\quad \underline{A'+B' = C-A} \\
\quad A+A'+A'+B' = B+C-A \\
\text{d'où} \quad A+A'+B' = C \\
\qquad \ldots,\ \text{etc.}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
(a)\ A+A' = B \\
\quad \underline{A'-B' = C-A-B'-B'} \\
\quad A+A'+A'-B' = C+B-A-B'-B' \\
\quad \text{d'où} \quad A+A'+B' = C. \\
\qquad \ldots,\ \text{etc.}
\end{array}
$$

Bref, toute composition aboutit naturellement, grâce à l'application des règles de substitution, à un emboîtement des classes d'ordre inférieur dans les classes d'ordre supérieur [1].

---

[1] Si l'on est frappé de l'infécondité de telles transformations, qu'on veuille bien se rappeler que notre seul but était de montrer qu'elles constituent un groupe. Au reste, comme le dit COUTURAT en comparant l'Algèbre de la Logique avec l'Algèbre mathématique: « En logique, la distinction des termes connus et inconnus est artificielle et presque inutile: tous les termes, en principe, sont connus et il s'agit seulement, étant donné entre eux certaines relations, d'en déduire des relations nouvelles (c'est-à-dire inconnues ou non explicitement connues) ». *L'Algèbre de la Logique*, p. 65.