§ VI

§ VI

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire les équations générales de la lutte pour la vie.

Soit en effet ε_r le coefficient d'accroissement de l'espèce r lorsqu'elle est seule; en supposant que toutes les espèces coexistent, l'accroissement de la population N_r dans le temps dt sera donné par

$$\left(\varepsilon_r + \frac{1}{\beta_r} \Sigma_s a_{sr} N_s\right) N_r \, dt$$

D'où les équations différentielles

$$\frac{dN_r}{dt} = \left(\varepsilon_r + \frac{1}{\beta_r} \Sigma_s a_{sr} N_s\right) N_r \,, \tag{1}$$

qui sont équivalentes à

$$\beta_r \frac{dN_r}{dt} = (\varepsilon_r \beta_r + \Sigma_s a_{sr} N_s) N_r \tag{1'}$$

ou à

$$\frac{d}{dt} \log N_r^{\beta_r} = \varepsilon_r \beta_r + \Sigma_s a_{sr} N_s \tag{1''}$$

dans lesquelles

$$a_{sr} = - a_{rs} \,, \qquad a_{rr} = 0 \,.$$

Nous pouvons envisager des cas particuliers intéressants. (Se référer aux fig. 6, 7, 8, § XI.) Si l'on n'a, par exemple, que deux espèces, les équations précédentes deviennent

$$\frac{dN_1}{dt} = \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{\beta_1} a_{21} N_2\right) N_1 \,, \qquad \frac{dN_2}{dt} = \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{\beta_2} a_{12} N_1\right) N_2$$

ou

$$\frac{dN_1}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) N_1 \,, \qquad \frac{dN_2}{dt} = (- \varepsilon_2 + \gamma_2 N_1) N_2 \,. \tag{2}$$

On suppose, lorsqu'on écrit ces équations, que la seconde espèce dévore la première et ε_1, ε_2, γ_1, γ_2 soient positifs et que l'on remplace ε_2 par $-\varepsilon_2$.

Si on a trois espèces, dont la seconde dévore la première, la première dévore la troisième et la troisième la seconde, il viendra

$$\frac{\beta_1}{N_1}\frac{dN_1}{dt} = a + qN_3 - rN_2\ , \qquad \frac{\beta_2}{N_2}\frac{dN_2}{dt} = b + rN_1 - pN_3\ ,$$

$$\frac{\beta_3}{N_3}\frac{dN_3}{dt} = c + pN_2 - qN_1 \tag{2'}$$

où a, b, c remplacent $\varepsilon_1\beta_1$, $\varepsilon_2\beta_2$, $\varepsilon_3\beta_3$, tandis que p, q, r remplacent a_{23}, a_{31}, a_{13} et où tous ces coefficients sont positifs.

Et ainsi de suite car on peut multiplier les exemples autant que l'on veut.

Ces équations jouent dans la dynamique démographique un rôle analogue aux équations de Lagrange dans la dynamique des corps.

Un simple examen de ces équations au point de vue analytique nous révèle une propriété très importante; c'est le *principe de la conservation des espèces.* On peut l'énoncer en disant que: *si une espèce existe à un certain instant, elle existera toujours et aura toujours existé.*

Il ne faut pas s'étonner de ce résultat qui, au premier abord, peut paraître paradoxal; il faut tenir compte du fait que les associations que nous envisageons sont des êtres idéaux tout à fait comparables aux êtres théoriques utilisés depuis longtemps dans les autres sciences et que l'on définit par une idéalisation des êtres réels. C'est ainsi qu'on suppose en mécanique rationnelle que les corps solides sont indéformables, que les contacts ont lieu sans frottement; et il est bien connu que pour pouvoir appliquer les mathématiques, une telle idéalisation est nécessaire, c'est-à-dire qu'il est nécessaire d'attribuer des propriétés absolues aux êtres qu'on étudie. Ces propriétés ne sont réalisées que d'une manière approchée dans le monde réel.

D'autre part, même dans le cas théorique traité, le nombre des individus d'une espèce peut se réduire à zéro, mais il faut pour cela un temps infiniment long. Dans ce cas on dit que *l'espèce s'épuise.*

§ VII

Dans bien des cas il est préférable de mettre les équations générales sous une autre forme. Il faut pour cela introduire un