II. — Les groupes de Lie.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1936)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

continu g admet, d'après O. SCHREIER [8], un groupe de recouvrement simplement connexe G. Les éléments de G qui correspondent à l'élément-unité i de g forment un sous-groupe *proprement discontinu* γ de G. Soit α un élément de γ, x un élément quelconque de G; l'élément $x\alpha\, x^{-1}$ de G, correspondant à l'élément unité de g, appartient à γ; il se réduit à α pour $x = i$ et il varie d'une manière continue avec x: il est donc toujours égal à α. L'élément α appartenant ainsi au centre de G, le groupe γ est abélien; or il est isomorphe au groupe de Poincaré de g.

Aux deux propriétés précédentes on en peut ajouter une troisième lorsque le groupe est clos:

3° *La caractéristique d'Euler d'un groupe fini et continu clos est nulle.*

Cela résulte immédiatement de l'existence, pour la variété, de déformations sans point fixe, par exemple celles qui sont définies par les équations $x' = ax$ (groupe des paramètres).

Les propriétés précédentes ne sont pas caractéristiques des variétés de groupes. Par exemple l'espace sphérique à $2n + 1 \geqq 5$ dimensions est orientable, simplement connexe et de caractéristique nulle; si c'était l'espace d'un groupe, ce groupe serait clos, donc serait un groupe de Lie; d'après les théorèmes que nous verrons un peu plus loin, ce groupe serait semi-simple et son troisième nombre de Betti serait positif, alors que celui de l'espace donné est nul.

II. — LES GROUPES DE LIE.

Arrivons aux groupes de Lie. Rappelons qu'un tel groupe, d'ordre r, admet des transformations infinitésimales dont l'ensemble forme un anneau avec r éléments de base $X_1, X_2, \ldots, X_r$; toute transformation infinitésimale est de la forme $e^i X_i$ [1] avec r coefficients réels arbitraires e^i. Rappelons aussi la notion du crochet (XY) de deux transformations infinitésimales, celle des *constantes de structure* c_{ij}^k qui entrent

[1] Nous supprimons, suivant l'usage, le signe de sommation devant un indice répété deux fois.

dans les *relations de structure* de Lie

$$(X_i X_j) = c_{ij}^k X_k , \tag{1}$$

enfin les relations algébriques [1]

$$\begin{cases} c_{ij}^k + c_{ji}^k = 0 , \\ c_{ij}^m c_{mk}^h + c_{jk}^m c_{mi}^h + c_{ki}^m c_{mj}^h = 0 . \end{cases} \tag{2}$$

Deux groupes d'ordre r sont *infinitésimalement isomorphes* si, par un choix convenable de leurs bases infinitésimales, ils ont les mêmes constantes de structure; ils ne sont pas nécessairement isomorphes « en grand », mais leurs groupes simplement connexes de recouvrement sont isomorphes.

Dans la théorie de la structure des groupes, l'« équation de Killing » joue un rôle important: c'est l'équation

$$\left\| e^k c_{ki}^j - \delta_i^j r \right\| = 0 \qquad (\delta_i^j = 1 \text{ si } i = j , \ 0 \text{ si } i \neq j) , \tag{3}$$

qui indique, une transformation infinitésimale $e^i X_i$ étant donnée, l'existence d'une transformation infinitésimale $\eta^h X_k$ telle qu'on ait

$$(e^i X_i , \ \eta^j X_j) = r \eta^k X_k .$$

La somme des carrés des racines de l'équation de Killing est une forme quadratique

$$\varphi(e) \equiv e^i e^j c_{ik}^h c_{jh}^k \tag{4}$$

qui joue un rôle fondamental [2].

Cette forme $\varphi(e)$, comme du reste les coefficients des différentes puissances de r dans l'équation de Killing, est un invariant du *groupe adjoint linéaire* Γ. C'est celui qui indique comment les transformations infinitésimales du groupe donné G sont transformées par les éléments du groupe: à l'élément a correspond la transformation linéaire en e^1, e^2, ..., e^r qui fait passer de $e^i X_i$ à $a(e^i X_i) a^{-1}$. Le groupe Γ est isomorphe, holoédrique ou mériédrique, de G; l'ordre de Γ peut être inférieur à celui de G; il ne lui est égal que si le centre de G est discontinu, G étant

alors un groupe de recouvrement de Γ. Si G est clos, Γ l'est aussi, mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

Rappelons enfin qu'à la transformation infinitésimale X_i de G correspond dans Γ la transformation infinitésimale

$$E_i \equiv c_{ki}^h e^k \frac{\partial f}{\partial e^h} . \qquad (5)$$

III. — Les groupes clos.

Dans l'étude topologique des groupes de Lie, les groupes clos jouent un rôle essentiel et c'est par eux que nous allons commencer. On a facilement des renseignements importants sur leur structure. En effet le groupe adjoint Γ d'un groupe clos G est également clos; d'après un théorème de M. H. Weyl [4], il laisse invariante au moins une forme quadratique définie positive, qu'on peut supposer ramenée à $(e^1)^2 + (e^2)^2 + \ldots + (e^r)^2$, de sorte que Γ est un groupe orthogonal. De là on déduit que les constantes de structure c_{ij}^k, antisymétriques par rapport à leurs deux premiers et par rapport à leurs deux derniers indices, ne changent pas par une permutation circulaire et changent de signe par une permutation impaire de leurs indices.

Si nous regardons les e^i comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans l'espace à r dimensions, Γ est un groupe de rotations ou de symétries autour de l'origine O. Par suite s'il laisse invariante une variété linéaire à p dimensions passant par O, il laissera invariante la variété à $r - p$ dimensions totalement perpendiculaire à la première. Du reste dire qu'une variété linéaire est invariante par Γ, c'est dire que les transformations infinitésimales $e^i X_i$ dont les points-images $(e^1, \ldots, e^r)$ sont dans la variété engendrent un *sous-groupe invariant* de G. Par un choix convenable des axes, c'est-à-dire de la base infinitésimale de G, on arrive, en utilisant les remarques précédentes, à partager les r variables e^i en h séries de $p_1, p_2, \ldots, p_h$ variables, ou encore les r transformations infinitésimales de base en h séries correspondantes, de manière

1° *que les transformations d'une même série engendrent un sous-groupe invariant de* G;