III.

Cette évaluation diffère de la précédente seulement par le fait que, maintenant, la constante C dépend de m. On peut d'ailleurs trouver aisément la forme exacte de la fonction $C(m)$.

III.

Passons maintenant à l'équation générale

$$L(u) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = f. \tag{12}$$

Nous supposons $| a_{ik} | \leq m$, les constantes de Hölder des a_{ik} $\leq M$, le déterminant des $a_{ik} = 1$ et nous considérons d'abord la solution de (12) à l'*intérieur*[1] du domaine borné G, le second membre f étant Hölderien ($\| f \|_{\alpha}^{G} < \infty$). Nous supposons en plus qu'une limitation de u est connue dans tout le domaine G et que u ainsi que ses dérivées secondes satisfont à la condition de Hölder à l'intérieur de G (mais pas nécessairement sur la frontière S). Cherchons une limitation de $D_1 u$, $D_2 u$ et des constantes de Hölder pour $D_2 u$ à l'intérieur de G. Soulignons, que nous *ne sommes pas* en train de construire une solution; la solution u de (12) est donnée, ses dérivées sont régulières et notre but est d'établir quelques inégalités. Notre procédé est le suivant: Soit P un point intérieur à G, $d(P)$ sa distance de la frontière du domaine G et λ un nombre (arbitraire) de l'intervalle $< 01 >$: $0 \leq \lambda \leq 1$. Construisons un cube $W(P, \lambda)$ à n dimensions, de centre P et de côtés parallèles aux axes; la longueur des côtés est égale à $\frac{2}{\sqrt{n}} \lambda d(P)$. Nous nous proposons de trouver la borne supérieure de la fonction

$$\left[d(P)\right]^{\alpha+2} \| u \|_{\alpha, 2}^{W(P, \lambda)} \overset{df}{=} h(P, \lambda)$$

pour λ constant. Désignons cette borne, qui d'ailleurs est finie, par $N(\lambda)$. Soit P_0 un point intérieur à G tel que

$$\left[d(P_0)\right]^{2+\alpha} \| u \|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)} \geqq \frac{N(\lambda)}{2}. \tag{13}$$

[1] A la fin de ce paragraphe nous donnerons une évaluation analogue sur la frontière et dans son voisinage.

En écrivant l'équation (12) sous la forme

$$L^0 u = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(P_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_{i,k=1}^{n} \left[a_{ik}(P_0) - a_{ik}(P)\right] \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + f , \tag{14}$$

nous pouvons appliquer les résultats obtenus plus haut pour l'équation à coefficients constants à

$$L^0 u = \Psi , \tag{15}$$

où

$$\Psi = \Sigma \left[a_{ik}(P_0) - a_{ik}(P)\right] \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + f . \tag{16}$$

Nous ne reproduirons pas ici tout le calcul (qui, d'ailleurs, ne dépasse pas l'étendue d'une page et demie [1]); le résultat en est

$$\left\| u \right\|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)} \leqq K(m, M) \left\{ \left\| u \right\|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)} \cdot \lambda^\alpha \left(d(P_0)\right)^\alpha + \frac{\operatorname{Max} |u|}{\lambda^{2+\alpha}\left[d(P_0)\right]^{2+\alpha}} + \ldots \right\} \tag{17}$$

K dépend de M, c'est-à-dire de la constante de Hölder des coefficients a_{ik}; on peut trouver facilement la forme exacte de cette dépendance. D étant le diamètre du domaine G, définissons λ_0 par la relation

$$K(m, M) \lambda_0^\alpha D^\alpha = \frac{1}{2} ; \tag{18}$$

l'inégalité précédente devient alors

$$\left\| u \right\|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)} \leqq \frac{1}{2} \left\| u \right\|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \alpha)} + K(m, M) \frac{\operatorname{Max} | u |}{\lambda_0^{2+\alpha}\left[d(P_0)\right]^{2+\alpha}} + \ldots . \tag{19}$$

En transportant $\frac{1}{2} \left\| u \right\|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)}$ dans le premier membre de l'inégalité (19) et en la multipliant ensuite par $\left[d(P_0)\right]^{2+\alpha}$, nous obtenons

$$\left\| u \right\|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)} \cdot \left[d(P_0)\right]^{2+\alpha} \leqq K_1(m, M) \left[\left\| f \right\|_\alpha^G + \operatorname{Max}_G | u |\right] , \tag{20}$$

d'où nous tirons, en vertu de (13), une limitation pour $N(\lambda)$.

[1] Voir mes publications indiquées plus haut et particulièrement la *Math. Zeitschrift.*

Ce raisonnement reste valable pour l'équation plus générale

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \Sigma b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f \, . \tag{21}$$

Passons maintenant à la limitation dans *le voisinage de la frontière.* Il faut alors ajouter à nos hypothèses la supposition suivante:

Dans un voisinage U d'une portion H de la frontière [1] les dérivées secondes de u satisfont à la condition [2] de Hölder ; $\left\|u\right\|_{\alpha,2}^{\mathrm{U}} < \infty$. φ étant les valeurs aux limites, nous prouvons, par un procédé tout à fait semblable au précédent, une limitation pour $\left\|u\right\|_{\alpha,2}^{\mathrm{U}'}$ dans chaque domaine U′ intérieur à U. Il suffit de transformer H en un hyperplan H′ et d'appliquer les limitations précédentes [3].

IV.

Nous démontrerons maintenant qu'on peut *déduire les théorèmes d'existence des limitations précédentes.* Commençons par l'équation

$$\mathrm{L}(u) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = f \tag{22}$$

et par des valeurs aux limites ayant des dérivées secondes Hölderiennes (problème de Dirichlet).

Envisageons l'ensemble d'équations du type elliptique dépendant d'un paramètre λ

$$\Sigma a_{ik}^{(\lambda)} \frac{\partial^2 u^{(\lambda)}}{\partial x_i \partial x_k} = f \tag{23}$$

et telles que l'on ait $a_{ik}^{(0)} = \delta_{ik}$ (symbole de Kronecker), mais $a_{ik}^{(1)} = a_{ik}$. Pour $\lambda = 0$ nous obtenons alors l'équation de Poisson

$$\Delta u^{(0)} = f$$

---

[1] Voir note 1, p. 129.

[2] C'est-à-dire les dérivées secondes satisfont à la condition de Hölder dans l'ensemble envisagé.

[3] Voir l'inégalité (8).