

# 1. — La notion de variété.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# LA NOTION DE RECOUVREMENT <sup>1</sup>

PAR

W. THRELFALL (Dresde).

---

## SOMMAIRE:

1. La notion de variété. — 2. Recouvrement sans ramification. — 3. Existence de la variété universelle de recouvrement. — 4. Unicité de cette variété. — 5. Les surfaces de Riemann et le théorème d'uniformisation. — 6. Le problème des formes spatiales. — 7. Les variétés-groupes. — 8. Les groupes de recouvrement. — 9. Les groupes à deux paramètres.

Celui qui s'occupe beaucoup de mathématiques remarque, s'il a quelque expérience, que c'est une science très pauvre en pensées. Il n'y a en mathématiques certainement pas plus d'idées primaires que de touches à un clavecin. Il n'est pas donné à un simple mortel d'augmenter à son gré le nombre de ces touches. Toute la joie d'un mathématicien c'est de jouer sur son clavecin. Le thème musical que nous voulons évoquer ici c'est la notion de recouvrement, et nous lui donnerons une extension assez générale pour qu'elle puisse servir de base à trois des plus belles théories mathématiques: à la théorie des fonctions de Riemann, au problème des formes spatiales et à la théorie des groupes continus.

## 1. — LA NOTION DE VARIÉTÉ.

A toute fonction analytique *m u l t i f o r m e* dans le plan complet ou — ce qui revient au même — sur la sphère, correspond une certaine surface de Riemann qui recouvre la sphère

---

<sup>1</sup> Conférence faite le 23 janvier 1935, au Colloque de l'Université et de l'Ecole Polytechnique fédérale de Zurich.

et sur laquelle la fonction est univoque. Soit  $P$  un point de la sphère et  $\bar{P}$  un point de la surface de Riemann superposé à  $P$ , il y aura en général un voisinage de  $P$  et un voisinage de  $\bar{P}$ , qui pourront être mis en correspondance biunivoque et continue; de plus le voisinage de  $\bar{P}$  recouvrira simplement celui de  $P$ . Mais il existe aussi nécessairement des points où la biunivocité cesse d'être possible. Ce sont les points de ramification de la surface de Riemann.

D'ailleurs il ne s'agira pas ici de surfaces de recouvrement de ce type. Nous nous bornerons à des recouvrements sans ramifications. Ce sont ceux pour lesquels la correspondance entre la surface fondamentale et la surface de recouvrement est biunivoque dans le voisinage de tout point.

Le tore nous fournit l'exemple le plus simple d'une telle surface; on obtient une surface de recouvrement à deux feuillets sans

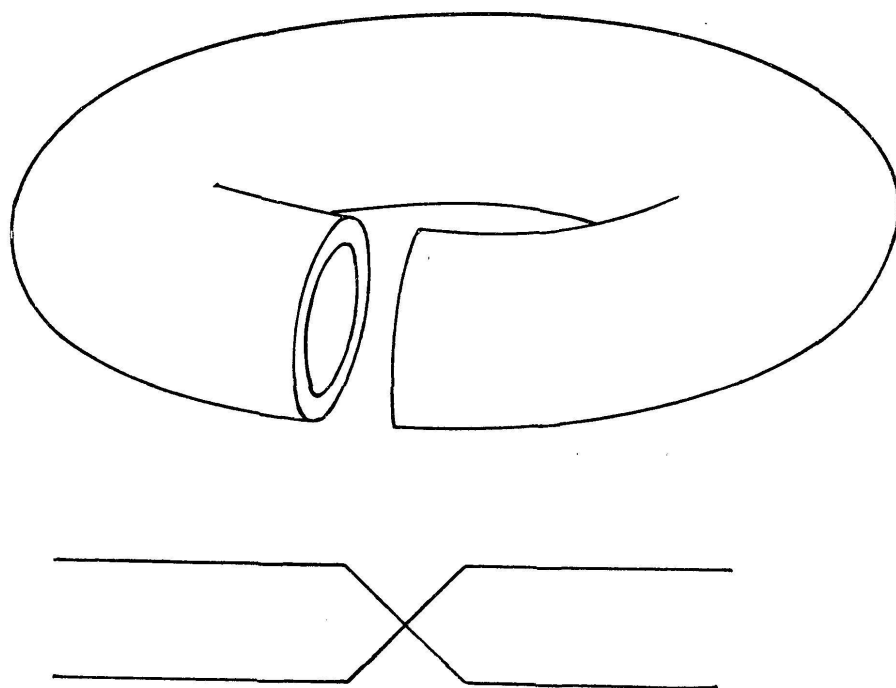


Fig. 1.

ramification en soudant en croix les bords opposés de deux exemplaires de ce tore qu'on a coupés suivant le même méridien (fig. 1). Si l'on s'imagine les deux exemplaires situés sur le même tore fondamental, on aura au lieu des deux méridiens de coupure une courbe fermée de pénétration. Les points de

cette courbe ne sont privilégiés que par le fait de l'immersion de notre tore dans l'espace ordinaire. Sur notre surface, considérée comme variété abstraite à deux dimensions, les points de ligne d'intersection ne se distinguent en aucune façon des autres points.

On obtient une autre surface de recouvrement en développant le tore sur un carré, après l'avoir coupé suivant un méridien et un parallèle; nous prenons une infinité de ces carrés et les juxtaposons comme dans un échiquier, infini dans toutes les directions. On retrouve ainsi le réseau bien connu de la théorie des fonctions doublement périodiques.

Si intuitif que soit ce procédé de soudure, nous ne pourrions nous en servir pour une théorie rigoureuse possédant le caractère de généralité que nous voulons lui donner en vue des applications. Pour parvenir à une notion claire et utile il faut revenir à la notion de *variété à  $n$  dimensions*. Les éléments dont se compose une variété, nous les appellerons des *points*. Mais il s'en faut de beaucoup que ces points puissent être assimilés à des points géométriques d'un espace euclidien ordinaire. Bien au contraire, la notion du point reste complètement abstraite; cette notion embrasse aussi bien des éléments de fonction analytique, que des droites de l'espace projectif, des états de mouvement d'un système mécanique ou des transformations d'un groupe continu. L'essentiel c'est qu'à chaque point  $P$  correspondent certains sous-ensembles de points qui forment ses *voisinages*. Axiomatiquement nous définissons ces voisinages par les deux propriétés suivantes:

1° Avec tout voisinage  $\mathfrak{B}(P)$  tout sous-ensemble contenant  $\mathfrak{B}(P)$  est également un voisinage de  $P$ .

2° Pour tout point il existe au moins un voisinage qui peut être mis en correspondance biunivoque avec l'intérieur d'une sphère euclidienne à  $n$  dimensions de telle sorte que par là les voisinages soient transformés en voisinages, les voisinages dans la sphère étant donnés par la métrique euclidienne.

L'axiome 2° équivaut au fait que, dans le voisinage de tout point, la variété doit se comporter comme un domaine de l'espace euclidien à  $n$  dimensions.

Si deux variétés peuvent être représentées l'une sur l'autre

par une représentation biunivoque qui conserve les voisinages on parle d'une représentation topologique; les deux variétés sont dites topologiquement équivalentes ou encore *homéomorphes*.

Nous exigeons en outre d'une variété:

3° *Qu'elle soit d'un seul tenant*, c'est-à-dire que deux quelconques de ses points puissent être reliés par un chemin; nous entendons par chemin une image continue du segment unitaire.

Enonçons encore une fois brièvement les trois *axiomes de la variété*:

M1: *Avec tout voisinage d'un point, tout sous-ensemble contenant ce voisinage est voisinage lui aussi.*

M2: *Il y a partout des voisinages sphériques.*

M3: *La variété est d'un seul tenant.*

Dans cette notion sont comprises toutes les surfaces fermées, comme la sphère ou le tore, toutes les surfaces ouvertes comme le plan euclidien ou l'hyperboloïde à une nappe, mais non pas les surfaces à bords, comme le disque circulaire, la condition M2 n'étant pas satisfaite pour les points du bord. Des exemples bien connus de variétés à  $n$  dimensions sont l'espace euclidien et l'espace projectif à  $n$  dimensions<sup>1</sup>. D'autres exemples sont les espaces de groupes continus.

## 2. — RECOUVREMENT SANS RAMIFICATION.

Nous allons maintenant définir les variétés de recouvrement sans ramification. Nous nous laissons guider dans ce but par l'exemple du recouvrement du tore. Nous désignerons par la suite la variété fondamentale par  $\mathfrak{M}$  et celle de recouvrement par  $\overline{\mathfrak{M}}$ . Soient  $P$  un point de  $\mathfrak{M}$  et  $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots$  les points de  $\overline{\mathfrak{M}}$  situés au-dessus de  $P$ . Si l'on adjoint à chaque point  $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots$  le point  $P$  situé au-dessous, on obtient une représentation continue  $G$  de  $\overline{\mathfrak{M}}$  sur  $\mathfrak{M}$ . Chaque point de  $\mathfrak{M}$  est évidemment l'image d'un point de  $\overline{\mathfrak{M}}$  au moins; c'est-à-dire: au-dessus de chaque point de  $\mathfrak{M}$  se

<sup>1</sup> D'autres exemples se trouvent e. g. dans les travaux cités plus loin, § 6, et de plus dans C. EHRESMANN, Sur la topologie de certains espaces homogènes, *Annals of Math.*, 35 (1934), p. 396-443.