

LA NOTION DE RECOUVREMENT

Autor(en): **Threlfall, W.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-26610>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

LA NOTION DE RECOUVREMENT ¹

PAR

W. THRELFALL (Dresde).

SOMMAIRE:

1. La notion de variété. — 2. Recouvrement sans ramification. — 3. Existence de la variété universelle de recouvrement. — 4. Unicité de cette variété. — 5. Les surfaces de Riemann et le théorème d'uniformisation. — 6. Le problème des formes spatiales. — 7. Les variétés-groupes. — 8. Les groupes de recouvrement. — 9. Les groupes à deux paramètres.

Celui qui s'occupe beaucoup de mathématiques remarque, s'il a quelque expérience, que c'est une science très pauvre en pensées. Il n'y a en mathématiques certainement pas plus d'idées primaires que de touches à un clavecin. Il n'est pas donné à un simple mortel d'augmenter à son gré le nombre de ces touches. Toute la joie d'un mathématicien c'est de jouer sur son clavecin. Le thème musical que nous voulons évoquer ici c'est la notion de recouvrement, et nous lui donnerons une extension assez générale pour qu'elle puisse servir de base à trois des plus belles théories mathématiques: à la théorie des fonctions de Riemann, au problème des formes spatiales et à la théorie des groupes continus.

1. — LA NOTION DE VARIÉTÉ.

A toute fonction analytique *m u l t i f o r m e* dans le plan complet ou — ce qui revient au même — sur la sphère, correspond une certaine surface de Riemann qui recouvre la sphère

¹ Conférence faite le 23 janvier 1935, au Colloque de l'Université et de l'Ecole Polytechnique fédérale de Zurich.

et sur laquelle la fonction est univoque. Soit P un point de la sphère et \bar{P} un point de la surface de Riemann superposé à P , il y aura en général un voisinage de P et un voisinage de \bar{P} , qui pourront être mis en correspondance biunivoque et continue; de plus le voisinage de \bar{P} recouvrira simplement celui de P . Mais il existe aussi nécessairement des points où la biunivocité cesse d'être possible. Ce sont les points de ramification de la surface de Riemann.

D'ailleurs il ne s'agira pas ici de surfaces de recouvrement de ce type. Nous nous bornerons à des recouvrements sans ramifications. Ce sont ceux pour lesquels la correspondance entre la surface fondamentale et la surface de recouvrement est biunivoque dans le voisinage de tout point.

Le tore nous fournit l'exemple le plus simple d'une telle surface; on obtient une surface de recouvrement à deux feuillets sans

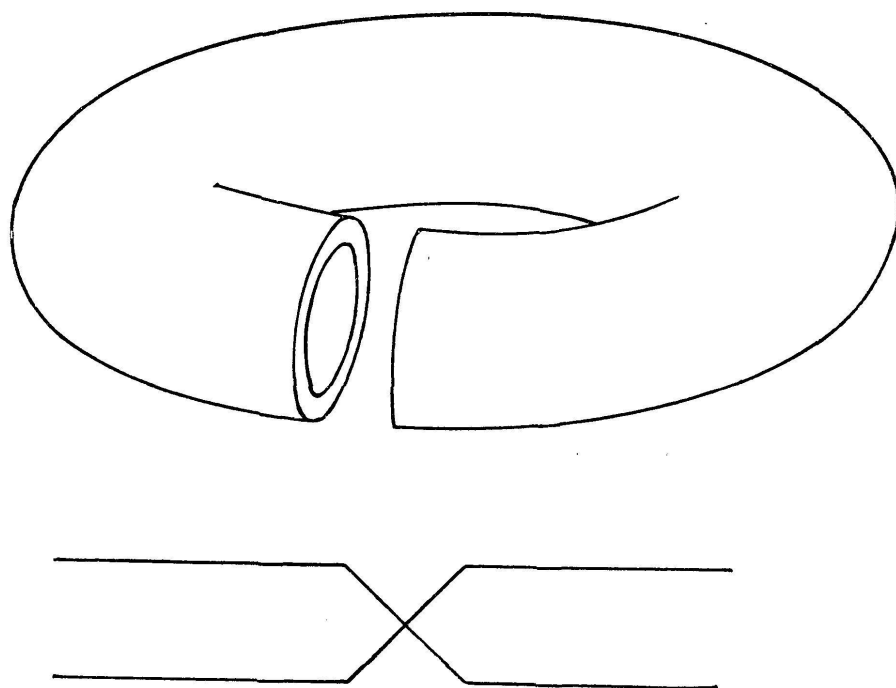


Fig. 1.

ramification en soudant en croix les bords opposés de deux exemplaires de ce tore qu'on a coupés suivant le même méridien (fig. 1). Si l'on s'imagine les deux exemplaires situés sur le même tore fondamental, on aura au lieu des deux méridiens de coupure une courbe fermée de pénétration. Les points de

cette courbe ne sont privilégiés que par le fait de l'immersion de notre tore dans l'espace ordinaire. Sur notre surface, considérée comme variété abstraite à deux dimensions, les points de ligne d'intersection ne se distinguent en aucune façon des autres points.

On obtient une autre surface de recouvrement en développant le tore sur un carré, après l'avoir coupé suivant un méridien et un parallèle; nous prenons une infinité de ces carrés et les juxtaposons comme dans un échiquier, infini dans toutes les directions. On retrouve ainsi le réseau bien connu de la théorie des fonctions doublement périodiques.

Si intuitif que soit ce procédé de soudure, nous ne pourrions nous en servir pour une théorie rigoureuse possédant le caractère de généralité que nous voulons lui donner en vue des applications. Pour parvenir à une notion claire et utile il faut revenir à la notion de *variété à n dimensions*. Les éléments dont se compose une variété, nous les appellerons des *points*. Mais il s'en faut de beaucoup que ces points puissent être assimilés à des points géométriques d'un espace euclidien ordinaire. Bien au contraire, la notion du point reste complètement abstraite; cette notion embrasse aussi bien des éléments de fonction analytique, que des droites de l'espace projectif, des états de mouvement d'un système mécanique ou des transformations d'un groupe continu. L'essentiel c'est qu'à chaque point P correspondent certains sous-ensembles de points qui forment ses *voisinages*. Axiomatiquement nous définissons ces voisinages par les deux propriétés suivantes:

1° Avec tout voisinage $\mathfrak{B}(P)$ tout sous-ensemble contenant $\mathfrak{B}(P)$ est également un voisinage de P .

2° Pour tout point il existe au moins un voisinage qui peut être mis en correspondance biunivoque avec l'intérieur d'une sphère euclidienne à n dimensions de telle sorte que par là les voisinages soient transformés en voisinages, les voisinages dans la sphère étant donnés par la métrique euclidienne.

L'axiome 2° équivaut au fait que, dans le voisinage de tout point, la variété doit se comporter comme un domaine de l'espace euclidien à n dimensions.

Si deux variétés peuvent être représentées l'une sur l'autre

par une représentation biunivoque qui conserve les voisinages on parle d'une représentation topologique; les deux variétés sont dites topologiquement équivalentes ou encore *homéomorphes*.

Nous exigeons en outre d'une variété:

3° *Qu'elle soit d'un seul tenant*, c'est-à-dire que deux quelconques de ses points puissent être reliés par un chemin; nous entendons par chemin une image continue du segment unitaire.

Enonçons encore une fois brièvement les trois *axiomes de la variété*:

M1: *Avec tout voisinage d'un point, tout sous-ensemble contenant ce voisinage est voisinage lui aussi.*

M2: *Il y a partout des voisinages sphériques.*

M3: *La variété est d'un seul tenant.*

Dans cette notion sont comprises toutes les surfaces fermées, comme la sphère ou le tore, toutes les surfaces ouvertes comme le plan euclidien ou l'hyperboloïde à une nappe, mais non pas les surfaces à bords, comme le disque circulaire, la condition M2 n'étant pas satisfaite pour les points du bord. Des exemples bien connus de variétés à n dimensions sont l'espace euclidien et l'espace projectif à n dimensions¹. D'autres exemples sont les espaces de groupes continus.

2. — RECOUVREMENT SANS RAMIFICATION.

Nous allons maintenant définir les variétés de recouvrement sans ramification. Nous nous laissons guider dans ce but par l'exemple du recouvrement du tore. Nous désignerons par la suite la variété fondamentale par \mathfrak{M} et celle de recouvrement par $\overline{\mathfrak{M}}$. Soient P un point de \mathfrak{M} et $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots$ les points de $\overline{\mathfrak{M}}$ situés au-dessus de P . Si l'on adjoint à chaque point $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots$ le point P situé au-dessous, on obtient une représentation continue G de $\overline{\mathfrak{M}}$ sur \mathfrak{M} . Chaque point de \mathfrak{M} est évidemment l'image d'un point de $\overline{\mathfrak{M}}$ au moins; c'est-à-dire: au-dessus de chaque point de \mathfrak{M} se

¹ D'autres exemples se trouvent e. g. dans les travaux cités plus loin, § 6, et de plus dans C. EHRESMANN, Sur la topologie de certains espaces homogènes, *Annals of Math.*, 35 (1934), p. 396-443.

trouve au moins un point de $\overline{\mathfrak{M}}$. De plus, si l'on calque un petit voisinage sphérique d'un point P de la variété fondamentale sur tous les feuilletés de la variété de recouvrement il est clair que les voisinages résultant de $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots$ sont représentés par G topologiquement sur le voisinage fondamental. Dans la fig. 2

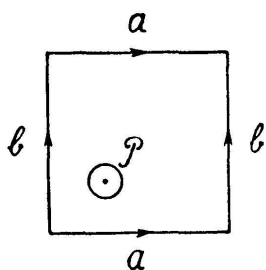


Fig. 2.

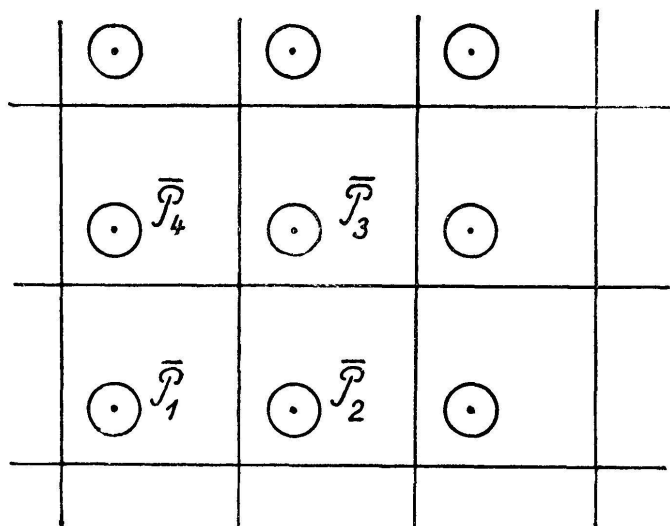


Fig. 3.

on a représenté le tore par un carré dont on a à identifier les côtés opposés. Dans la fig. 3 on a la division correspondante du plan avec les points $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots$ situés au-dessus d'un même point P .

Les deux propriétés de la variété de recouvrement que nous venons de citer, subsisteraient encore si l'on supprimait un point, disons \overline{P}_1 , de la variété de recouvrement. Pour exclure des éventualités de ce genre, il est nécessaire d'ajouter un nouvel axiome: Soit Q un point quelconque de $\mathfrak{B}(P)$ et \overline{Q} un point situé au-dessus de Q ; nous exigeons que \overline{Q} appartienne toujours à l'un des voisinages $\mathfrak{B}(\overline{P}_1), \mathfrak{B}(\overline{P}_2), \dots$. Considérons par exemple le plan euclidien de la fig. 3 pointé en \overline{P}_1 . Les points situés au-dessus de P sont alors $\overline{P}_2, \overline{P}_3, \dots$, et les voisinages situés au-dessus de $\mathfrak{B}(P)$ sont $\mathfrak{B}(\overline{P}_2), \mathfrak{B}(\overline{P}_3), \dots$. L'ensemble de ces voisinages épuise les points situés au-dessus de $\mathfrak{B}(P)$, exceptés ceux du voisinage de \overline{P}_1 ; le nouvel axiome n'est donc pas satisfait.

L'exemple du tore nous a donc fourni trois propriétés importantes. Nous les élevons au grade d'axiomes des variétés de recouvrement, sans ramification, d'une variété quelconque. Nous dirons: Une variété $\overline{\mathfrak{M}}$ recouvre une variété \mathfrak{M} s'il existe une

représentation continue G de $\overline{\mathfrak{M}}$ sur \mathfrak{M} ayant les propriétés suivantes :

R1: *Tout point P de \mathfrak{M} est l'image d'un point de $\overline{\mathfrak{M}}$ au moins.*

R2: *Il existe des voisinages $\mathfrak{B}(\overline{P}_1)$, $\mathfrak{B}(\overline{P}_2)$, ... des points \overline{P}_1 , \overline{P}_2 , ... situés au-dessus d'un point P , qui sont représentés topologiquement sur un même voisinage $\mathfrak{B}(P)$ de P .*

R3: *Soit Q un point de $\mathfrak{B}(P)$ et \overline{Q} un point situé au-dessus de Q ; \overline{Q} appartient alors à l'un des voisinages $\mathfrak{B}(\overline{P}_1)$, $\mathfrak{B}(\overline{P}_2)$, ...*

R1 signifie que $\overline{\mathfrak{M}}$ recouvre \mathfrak{M} complètement, R2 que la relation entre \mathfrak{M} et $\overline{\mathfrak{M}}$ est localement topologique, R3 que $\overline{\mathfrak{M}}$ n'a pas de frontière; c'est-à-dire que, étant donné dans la variété fondamentale une courbe partant d'un point O , on peut la calquer sur $\overline{\mathfrak{M}}$ de telle sorte qu'elle parte d'un quelconque des points situés au-dessus de O , sans jamais toucher une frontière, ce qui aurait lieu par exemple au point P_1 , considéré tout à l'heure.

3. — EXISTENCE DE LA VARIÉTÉ UNIVERSELLE DE RECOUVREMENT.

La question suivante se pose: Etant donnée une variété \mathfrak{M} , combien possède-t-elle de variétés de recouvrement différentes? Il est possible de répondre complètement à cette question, lorsqu'on connaît le groupe fondamental de \mathfrak{M} dans toute sa structure. La réponse est donnée par le théorème suivant: « Les variétés de recouvrement correspondent biunivoquement aux sous-groupes du groupe fondamental, ou plutôt aux classes de sous-groupes conjugués. » *En ce cas deux variétés de recouvrement de \mathfrak{M} ne seront pas différentes, si elles admettent une représentation topologique l'une sur l'autre, telle que les images des points situés au-dessus d'un même point soient elles-mêmes situées au-dessus de ce point.*

Nous ne nous arrêterons pas à la démonstration complète du théorème ¹, mais nous nous bornerons à un cas spécial, particu-

¹ Voir H. SEIFERT et W. THRELFALL, *Lehrbuch der Topologie* (Leipzig, 1934), chap. VIII. On y trouve aussi les détails supprimés dans la démonstration du texte.

lièrement important: le théorème d'existence et d'unicité de la variété universelle de recouvrement, c'est-à-dire:

Toute variété \mathfrak{M} possède une variété de recouvrement simplement connexe et une seule, qu'on appelle le recouvrement universel $\hat{\mathfrak{M}}$. Rappelons que simplement connexe signifie qu'il est possible de resserrer sur un point tout chemin fermé; il est permis que le chemin se recoupe au cours de la déformation.

Admettons tout d'abord que nous ayons déjà construit une variété de recouvrement simplement connexe $\hat{\mathfrak{M}}$ de \mathfrak{M} . Nous choisissons sur \mathfrak{M} un point fixe O et sur $\hat{\mathfrak{M}}$ un point \bar{O} au-dessus de O . Menons un chemin quelconque ω allant de O à P ; nous pourrons le calquer sur $\hat{\mathfrak{M}}$ et il conduira là du point \bar{O} à un point bien déterminé \bar{P} . Tout chemin ω partant de O détermine de cette manière univoquement un point P de $\hat{\mathfrak{M}}$. Quand deux chemins ω_1 et ω_2 détermineront-ils le même point \bar{P} ? Ce sera certainement le cas lorsqu'il sera possible de déformer ω_1 en ω_2 en maintenant O et P fixes. Car, puisqu'il est possible de calquer la déformation sur $\hat{\mathfrak{M}}$, ω_1 et ω_2 devront conduire tous deux au point \bar{P} (fig. 4).

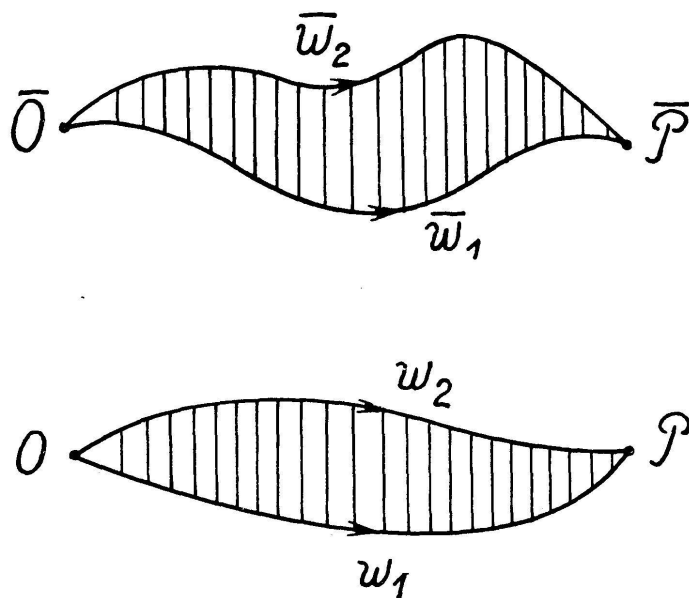


Fig. 4.

Si, au contraire, ω_1 et ω_2 ne peuvent être déformés l'un dans l'autre, $\bar{\omega}_1$ et $\bar{\omega}_2$ ne conduiront pas au même point. Car admettons que les deux chemins conduisent de \bar{O} à \bar{P} ; il sera alors possible, puisque par hypothèse $\hat{\mathfrak{M}}$ est simplement connexe, de les

déformer l'un dans l'autre. Cette déformation, nous la recalquons sur \mathfrak{M} ; on devrait donc, contrairement à l'hypothèse, pouvoir déformer ω_1 en ω_2 . Les points de $\hat{\mathfrak{M}}$ correspondent donc biunivoquement aux classes de chemins de \mathfrak{M} , déformables l'un dans l'autre.

Nous allons utiliser inversement ce résultat pour construire une variété de recouvrement simplement connexe. Nous choisissons sur \mathfrak{M} un point fixe O et nous menons à partir de O tous les chemins possibles conduisant à tous les points possibles de \mathfrak{M} . Nous répartirons tous ces chemins en classes. Deux chemins a et b appartiendront à la même classe si premièrement ils conduisent au même point P et secondement s'il est possible de les déformer l'un dans l'autre, en maintenant O et P fixes.

Ce sont ces classes de chemins que nous introduirons par définition comme les *points* de la variété de recouvrement $\hat{\mathfrak{M}}$ à construire. C'est ici que nous utilisons le caractère abstrait de notre définition de la variété. Il y aura, en général, plusieurs classes de chemins $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$ qui correspondront au même point P de \mathfrak{M} . Nous dirons que $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$ sont situés au-dessus de P . De plus nous devons définir maintenant ce qu'on entend par *voisinage* des points introduits, car sans cela l'ensemble de points $\hat{\mathfrak{M}}$ ne serait pas une variété. Soit \bar{P} un point de $\hat{\mathfrak{M}}$, c'est-à-dire une classe de chemins conduisant de O à un point P de \mathfrak{M} . Nous considérons un voisinage sphérique $\mathfrak{B}(P)$, et menons à partir de P tous les chemins conduisant à tous les points de $\mathfrak{B}(P)$ et ceci sans sortir de $\mathfrak{B}(P)$. Soit $\delta = PQ$ un de ces chemins et a un élément de la classe \bar{P} (fig. 5); parcourons

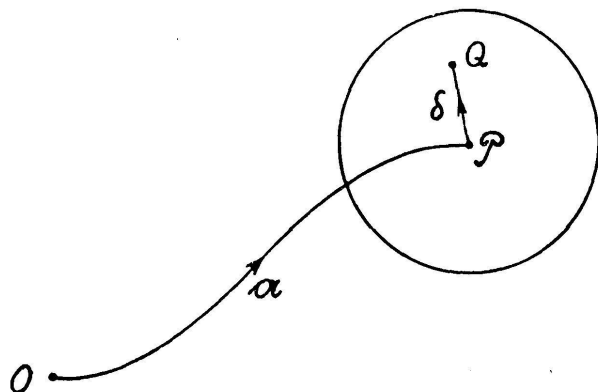


Fig. 5.

d'abord le chemin α , puis δ , et nous obtiendrons ainsi un chemin $\alpha\delta$ auquel correspondra un point bien déterminé \bar{Q} de $\hat{\mathfrak{M}}$. Les points ainsi construits sur les points de $\mathfrak{B}(P)$ formeront un voisinage $\mathfrak{B}(\bar{P})$. La définition est telle qu'à des chemins voisins sur \mathfrak{M} correspondent des points voisins de $\hat{\mathfrak{M}}$. Il est clair que les points de $\mathfrak{B}(\bar{P})$ correspondent biunivoquement aux points de $\mathfrak{B}(P)$ et que de plus cette correspondance de $\mathfrak{B}(\bar{P})$ à $\mathfrak{B}(P)$ conserve les voisinages. $\mathfrak{B}(\bar{P})$ est donc homéomorphe à $\mathfrak{B}(P)$ et par conséquent homéomorphe à l'intérieur d'une sphère à n dimensions. La condition M2 du § 1 est donc satisfaite. Pour satisfaire à M1, nous dirons aussi que tout sous-ensemble de $\hat{\mathfrak{M}}$ contenant $\mathfrak{B}(\bar{P})$ est un voisinage de \bar{P} . Finalement il est possible de relier deux points de $\hat{\mathfrak{M}}$ par une courbe. Une des extrémités de la courbe est donnée par un chemin OP et l'autre par un chemin OQ . Le fait qu'il est possible de relier les points \bar{P} \bar{Q} veut dire qu'il est possible de déformer OP en OQ d'une manière continue. Mais il suffit pour cela de contracter ces deux chemins sur le point O . $\hat{\mathfrak{M}}$ est donc bien une variété.

Nous allons démontrer maintenant que $\hat{\mathfrak{M}}$ est une variété de recouvrement de \mathfrak{M} . L'axiome R1 est satisfait, puisqu'il est possible de relier par un chemin tout point P de \mathfrak{M} au point O . La classe de chemins correspondante est un point au-dessus de P . L'existence des voisinages $\mathfrak{B}(P)$, $\mathfrak{B}(\bar{P}_1)$, $\mathfrak{B}(\bar{P}_2)$, ... découle immédiatement de leur construction. R3 est également satisfait. Soit Q un point de $\mathfrak{B}(P)$ et \bar{Q} un point au-dessus de Q ; \bar{Q} est donc déterminé par un chemin $OQ = \omega$. Si nous relierons par un chemin ν dans $\mathfrak{B}(P)$ le point Q au point P , le chemin $\omega \cdot \nu$ détermine un point \bar{P} au-dessus de P . \bar{Q} est alors dans le voisinage $\mathfrak{B}(\bar{P})$; car le chemin $\omega \nu \nu^{-1}$ définit un point \bar{Q}' au-dessus de Q , appartenant au voisinage $\mathfrak{B}(\bar{P})$. Mais, puisqu'il est possible de déformer $\omega \nu \nu^{-1}$ en ω , on a $\bar{Q}' = \bar{Q}$.

Il reste à montrer que $\hat{\mathfrak{M}}$ est simplement connexe. Une courbe fermée \bar{k} de $\hat{\mathfrak{M}}$ est engendrée par une suite continue de chemins de \mathfrak{M} partant de O et aboutissant aux points d'une courbe fermée k (fig. 6). Or, si nous contractons uniformément tous ces chemins sur le point O , cela revient à déformer la courbe \bar{k} en un point.

Nous avons donc construit une variété de recouvrement

simplement connexe d'un caractère spécial. Le caractère spécial consiste en ce que les points étaient des classes de chemins. Puisque nous avons démontré maintenant l'existence de la variété, nous pouvons nous débarrasser de son caractère spécial

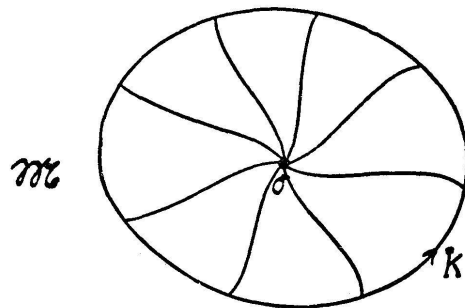


Fig. 6.

et nous entendrons dorénavant par $\hat{\mathcal{M}}$ de nouveau une variété abstraite. Il est en outre permis dans tous les cas de se figurer cette variété de recouvrement comme une variété ponctuelle qui est au-dessus de \mathcal{M} .

4. — UNICITÉ DE LA VARIÉTÉ DE RECOUVREMENT UNIVERSELLE.

La démonstration d'unicité de la variété de recouvrement universelle se fait alors de la manière suivante:

Considérons deux variétés de recouvrement simplement connexes $\hat{\mathcal{M}}$ et $\hat{\mathcal{M}}'$ de \mathcal{M} . Soit encore une fois O un point fixe de \mathcal{M} , \bar{O} resp. \bar{O}' un point quelconque sur $\hat{\mathcal{M}}$ resp. sur $\hat{\mathcal{M}}'$, situés tous deux au-dessus de O . Nous allons construire une représentation de $\hat{\mathcal{M}}$ sur $\hat{\mathcal{M}}'$.

Soit \bar{P} un point quelconque de $\hat{\mathcal{M}}$. Nous menons un chemin $\bar{O}\bar{P} = \bar{u}$ (fig. 7), nous le calquons en un chemin $OP = u$ sur \mathcal{M} et nous recalquons ce dernier en un chemin $\bar{O}'\bar{P}' = \bar{u}'$ de $\hat{\mathcal{M}}'$. Ce procédé est possible, puisque la représentation G de $\hat{\mathcal{M}}'$ sur $\hat{\mathcal{M}}$ est localement topologique; nous renonçons ici à la démonstration rigoureuse.

Nous avons abouti ainsi à un point \bar{P}' bien déterminé, qui sera l'image de \bar{P} . Ce point est indépendant du chemin \bar{u} choisi. Car, $\hat{\mathcal{M}}$ étant simplement connexe, deux chemins \bar{u} et

$\bar{\nu}$ partant de \bar{O} et aboutissant à \bar{P} peuvent être déformés l'un dans l'autre en maintenant \bar{O} et \bar{P} fixes. Il en est donc de même de u et ν sur \mathfrak{M} , et cette dernière déformation peut être calquée de \mathfrak{M} sur $\hat{\mathfrak{M}}'$; u' et ν' aboutissent donc au même point \bar{P}' .

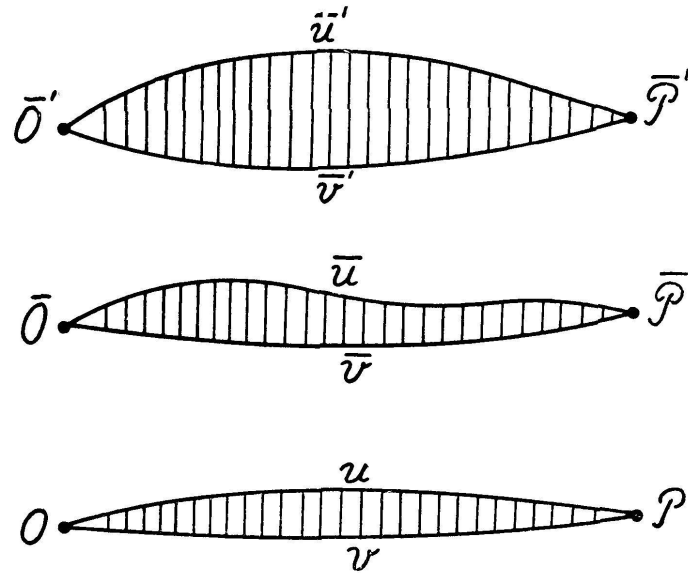


Fig. 7.

Puisque $\hat{\mathfrak{M}}'$ est simplement connexe, la représentation $\bar{P} \rightarrow \bar{P}'$ possède une inverse univoque et continue; la relation entre $\hat{\mathfrak{M}}$ et $\hat{\mathfrak{M}}'$ est donc topologique. Deux points correspondants \bar{P} et \bar{P}' étant situées au-dessus du même point fondamental P , nous pouvons considérer $\hat{\mathfrak{M}}$ et $\hat{\mathfrak{M}}'$ comme une même variété de recouvrement, conformément à la définition de la variété de recouvrement.

Le théorème d'existence et d'unicité de la variété universelle de recouvrement est donc complètement démontré.

Si nous considérons $\hat{\mathfrak{M}}'$ et $\hat{\mathfrak{M}}$ comme confondus, la démonstration montre en même temps qu'il existe une représentation topologique F de la variété $\hat{\mathfrak{M}}$ sur elle-même, transformant un point \bar{O} au-dessus de O en un autre point quelconque \bar{O}' , lui aussi au-dessus de O . Une transformation de ce genre est dite une transformation de $\hat{\mathfrak{M}}$ en soi. Les transformations de $\hat{\mathfrak{M}}$ en soi forment un groupe dont l'ordre est égal au nombre de feuilletts du recouvrement (qui d'ailleurs peut être infini); c'est le groupe de superpositions de $\hat{\mathfrak{M}}$ (Deckbewe-

gungsgruppe). Nous retrouvons \mathfrak{M} à partir de $\hat{\mathfrak{M}}$ en identifiant les points équivalents par rapport à ce groupe.

Par exemple, le recouvrement universel du tore est le plan euclidien, car celui-ci est simplement connexe, et les transformations du plan euclidien en soi sont les translations conservant le réseau quadratique. Le domaine de discontinuité de ce groupe de superpositions est un carré dont les côtés opposés sont équivalents; en les indentifiant on a la surface fermée du tore.

Soit dit en passant, le groupe de superpositions de $\hat{\mathfrak{M}}$ est toujours isomorphe au groupe fondamental de \mathfrak{M} , on pourra donc sans autre introduire le groupe fondamental comme groupe de superpositions de la variété de recouvrement universelle.

Ce n'est pas en vain que nous avons insisté avec tant d'énergie sur le théorème d'existence et d'unicité. Nous en ferons des applications importantes à trois des plus beaux problèmes mathématiques: la classification des surfaces de Riemann, des formes spatiales et des groupes continus.

5. — LES SURFACES DE RIEMANN ET LE THÉORÈME D'UNIFORMISATION.

En théorie des fonctions il s'agit de surfaces de Riemann¹. Une surface de Riemann y est définie comme une variété à deux dimensions portant une métrique angulaire; la représentation conforme de deux surfaces de Riemann a donc un sens bien déterminé. Pour être plus précis, il faudra donc ajouter aux trois axiomes de la variété du §1 la condition de *c o n f o r m i t é*:

Un voisinage de tout point P est rapporté à une variable complexe qui est appelée u n i f o r m i s a n t e l o c a l e. C'est-à-dire, le voisinage est représenté sur une partie du plan complexe. Soient Q un point du voisinage $\mathfrak{B}(P)$, t_P et t_Q des uniformisantes locales en P et Q; t_Q devra être une fonction analytique de t_P .

Il est permis de parler de fonctions analytiques sur une surface de Riemann de ce type. Il est également possible de représenter

¹ H. WEYL, *Die Idee der Riemannschen Fläche* (Leipzig, 1923).

conformément deux surfaces de Riemann l'une sur l'autre. Nous ne distinguerons pas l'une de l'autre deux surfaces de Riemann admettant entr'elles une représentation conforme.

Une conséquence immédiate de cette définition de la surface de Riemann est que toute variété de recouvrement d'une surface de Riemann est elle-même une surface de Riemann. Car si les points $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$ sont au-dessus de P , il suffit de transporter l'uniformisante locale de P à ces points. Pour toute surface de Riemann il existe en particulier une surface de recouvrement $\hat{\mathfrak{M}}$ universelle, univoquement déterminée, comme nous venons de le voir. En partant de cette dernière on retrouve la surface fondamentale \mathfrak{M} en appliquant le groupe de superpositions de $\hat{\mathfrak{M}}$ et en identifiant les points équivalents. Il est clair que ce groupe est un groupe discontinu de représentations conformes, sans points fixes.

Le problème de la classification des surfaces de Riemann se scinde maintenant en deux questions partielles :

- I^o *Trouver toutes les surfaces de Riemann simplement connexes.*
 II^o *Trouver tous les groupes de transformations conformes, discontinus, sans points fixes qui transforment chacune de ces surfaces de Riemann simplement connexes en elles-mêmes.*

Le premier problème est le problème fondamental de la théorie de l'uniformisation. Nous y répondons par le théorème d'uniformisation de Poincaré et de Koebe: Il existe trois surfaces de Riemann simplement connexes, la sphère des nombres complexes, le plan des nombres complexes et l'intérieur du cercle unité.

La résolution de la première question facilite la réponse à la seconde. Nous savons qu'une transformation conforme d'une de ces trois surfaces est une transformation linéaire. Nous obtiendrons donc toutes les surfaces de Riemann à partir de ces trois, en leur appliquant tous les groupes possibles discontinus, de transformations linéaires, sans points fixes.

Toute surface de Riemann est, il est vrai, une variété à deux dimensions, mais par contre toute variété à deux dimensions n'est pas une surface de Riemann. Les variétés à deux dimensions

non orientables en sont exclues; car l'uniformisante locale détermine en chaque point une orientation. Les uniformisantes locales des points voisins s'obtenant par transformations analytiques de l'une dans l'autre, l'orientation est cohérente sur toute la surface, puisque les transformations analytiques ne renversent pas le sens de l'orientation. De plus toute surface de Riemann peut être triangulée, c'est-à-dire qu'on peut la recouvrir par un ensemble dénombrable de triangles¹.

Inversement toute variété à deux dimensions orientable sera une surface de Riemann s'il est possible de la trianguler. On démontre cette proposition en construisant une surface homéomorphe à la surface donnée recouvrant en tout ou en partie la sphère, et qui peut être ramifiée en certains points. On peut effectuer très simplement cette construction de la façon suivante: Soit donnée une certaine triangulation de la surface topologique à laquelle nous donnons une certaine orientation. De même, nous donnons une orientation déterminée à la sphère sur laquelle nous voulons appliquer la surface. Nous choisissons pour chaque sommet de notre triangulation un point sur notre sphère. Ce choix est arbitraire sauf que trois quelconques de ces points ne doivent jamais être situés sur le même grand cercle (on peut les prendre par exemple tous sur un même parallèle). Alors, nous représentons chaque triangle de la triangulation donnée de la surface par le triangle sphérique qui est déterminé par les trois points correspondants aux trois sommets. Cette représentation est biunivoque, si l'on exige que l'orientation donnée de la surface et l'orientation donnée de la sphère soient transformées l'une dans l'autre. La représentation de tous les triangles engendre une représentation de toute la surface sur la sphère comme nous la cherchons.

La théorie des fonctions comme on la traite d'habitude, ne part pas de la surface de Riemann, mais bien de la fonction analytique qui est donnée par une série de puissances. Les éléments de cette fonction analytique sont alors les points de la surface de Riemann. En définissant des voisinages dans l'ensemble de ces points on en fait une variété à deux dimensions qui est une surface de

¹ T. RADÓ, Ueber den Begriff der Riemannschen Fläche. *Acta Litt. Sci. Szeged*, 2 (1925), p. 101-121.

Riemann dans le sens expliqué plus haut¹. Mais on a besoin d'une démonstration spéciale pour être sûr que toute surface de recouvrement est une surface de Riemann elle-même, engendrée par une fonction analytique.

6. — PROBLÈME DES FORMES SPATIALES.

Les formes spatiales de deux et de plusieurs dimensions sont en rapport immédiat avec les surfaces de Riemann. Une forme spatiale est une variété à n dimensions munie d'une métrique de Riemann, qui dans le voisinage de tout point est congruente à celle d'un espace ou bien sphérique ou euclidien ou hyperbolique. On distinguera donc les différents cas des *formes spatiales sphériques, euclidiennes et hyperboliques*.

Nous avons de nouveau le théorème: Une variété de recouvrement d'une forme spatiale est encore une forme spatiale, puisqu'il est possible de calquer la métrique de la variété fondamentale sur la variété de recouvrement.

Il suffira donc d'étudier les deux points suivants pour trouver toutes les formes spatiales:

- I^o *Les formes spatiales simplement connexes,*
 II^o *Leurs groupes discontinus de transformations congruentes sans point fixe.* Nous appellerons ces groupes aussi les groupes discontinus de mouvements².

La première question qui est l'analogue du problème d'uniformisation est résolue par le théorème de H. Hopf³ qui dit: Il n'existe pour toutes les dimensions que trois formes spatiales simplement connexes, à savoir: l'espace sphérique, l'espace euclidien, l'espace hyperbolique. La démonstration de ce théorème ne présente pas autant de difficultés que celle du théorème d'uniformisation. Faisons l'hypothèse, qui sera réduite à l'absurde, qu'il existe deux formes spatiales \mathfrak{M}_1 et \mathfrak{M}_2 euclidiennes, simplement connexes. Nous menons à partir d'un point O_1 de \mathfrak{M}_1 toutes les lignes géodésiques possibles et nous

¹ H. WEYL, *loc. cit.*

² D'après M. E. Cartan ce sont les groupes d'holonomie; c. f. E. CARTAN, *La géométrie des espaces de Riemann*. Paris, 1928, p. 72.

³ H. HOPF, Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem. *Math. Ann.*, 95 (1925), p. 313-339.

faisons de même pour un point O_2 de \mathfrak{M}_2 . Nous construisons une représentation de \mathfrak{M}_1 sur \mathfrak{M}_2 en représentant O_1 sur O_2 et les lignes géodésiques sur les lignes géodésiques. On peut démontrer que cette représentation est congruente.

Quant aux groupes discontinus de mouvements des formes spatiales simplement connexes dont les autres formes spatiales sont les domaines de discontinuité, nous n'avons de résultats complets que pour les espaces à deux et à trois dimensions. Pour les formes à trois dimensions on connaît à fond les formes spatiales sphériques et euclidiennes¹, alors que nous n'avons que des exemples de formes hyperboliques².

C'est la notion de surface de Riemann qui a posé le problème des formes spatiales: il suffit d'exiger de la représentation conforme du voisinage d'un point qu'elle soit en plus congruente. Mais le rôle profond du problème de formes spatiales ne repose pas sur cette relation avec la théorie des fonctions; au contraire, il est en relation avec le problème cosmologique de l'espace; on peut en effet se demander à quel type de variété l'espace de notre intuition et de la physique appartient? Le rôle privilégié qu'a joué la métrique sphérique, euclidienne et hyperbolique et qui d'ailleurs paraissait arbitraire se voit éclairé du même coup. Car ces trois variétés sont justement les seules variétés simplement connexes où l'on puisse faire de la géométrie au sens ordinaire, c'est-à-dire les seules variétés qui admettent un groupe continu de transformations topologiques respectant les conditions de mobilité de Lie-Helmholtz.

7. — VARIÉTÉS-GROUPES.

Une variété à n dimensions \mathfrak{M} est dite *groupe continu* lorsque, à chaque couple de points A et B donnés dans cet ordre

¹ H. HOPF, Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem, *l. c.*

W. THRELFALL u. H. SEIFERT, Topologische Untersuchung der Discontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes. I. *Math. Ann.*, 104 (1930), p. 1-70; II. *Math. Ann.*, 107 (1932), p. 543-586.

W. HANTZSCHE u. H. WENDT, Dreidimensionale euklidische Raumformen. *Math. Ann.*, 110 (1934), p. 593-611.

W. NOWACKI, Die dreidimensionalen geschlossenen und offenen euklidischen Raumformen. *Comm. Math. Helv.*, vol. 7, 1934, p. 81.

² C. WEBER u. H. SEIFERT, Die beiden Dodekaederräume, *Math. Ztschr.*, 37 (1933), p. 238-253.

F. LOEBELL, Beispiele geschlossener dreidimensionaler Clifford-Kleinschen Räume negativer Krümmung. *Ber. Sächs. Akad. Wiss.*, 83 (1931).

correspond un troisième point C, le *produit* de A et B. Nous écrirons

$$C = AB .$$

Cette multiplication doit satisfaire aux axiomes ordinaires du groupe, c'est-à-dire à l'unicité, l'associativité, l'existence de l'élément unité et de l'élément inverse. Cette liaison devra être de plus continue, c'est-à-dire que C variera d'une manière continue, s'il en est de même de A et B, et si A varie d'une manière continue, il en sera de même de A^{-1} . Le groupe est dit *d'ordre n* si la variété est à n dimensions.

Les rotations rigides de l'espace euclidien autour d'un point O sont un exemple d'un groupe continu. Une rotation est ici déterminée par un axe orienté, c'est-à-dire par un rayon issu de O, et par un angle de rotation φ , variant de 0 à π . Si nous portons sur le rayon le segment $OP = \varphi$ nous représentons par là les rotations autour de O biunivoquement sur les points de la sphère massive de rayon π . La biunivocité ne fait défaut que pour les points frontières de cette sphère: Comme à des points frontières diamétralement opposés correspondent des rotations d'angle π autour du même axe de sens opposé, il faudra, puisque ces deux rotations sont confondues, identifier ces deux points frontières, pour obtenir la variété-groupe \mathfrak{M} . Ce procédé d'identification bien connu nous conduit à l'espace projectif ¹. Le groupe continu se présente ici comme l'espace projectif \mathfrak{P} .

Il est d'ailleurs possible de considérer le groupe continu comme un groupe de transformations de notre variété-groupe. A cet effet nous faisons correspondre à A la transformation

$$X \rightarrow XA ,$$

X étant un point variable. Ceci est une correspondance biunivoque. Car tout point Y est l'image bien déterminée d'un point, à savoir du point YA^{-1} . Cette représentation est de plus sans points fixes, pourvu que A ne coïncide pas avec l'élément unité du groupe. Car de $X = XA$ nous tirons $A = E$. Le groupe de transformations ainsi défini est holoédriquement isomorphe au groupe donné \mathfrak{M} . Cette interprétation du groupe est analogue

¹ On trouve la démonstration p. 54 du cours de Topologie cité plus haut (p. 233).

à la représentation bien connue, dite régulière, d'un groupe d'ordre fini r par un groupe de permutations de r indices; les permutations de la représentation régulière sont, comme on le sait bien, les lignes ou les colonnes du « carré de Cayley » du groupe. La seule différence est qu'il s'agit ici d'un groupe dont les éléments forment un ensemble continu.

Il existe des variétés qui ne sont pas des variétés-groupes. Il est facile de voir que les variétés non orientables nous en donnent un exemple. Car, soit ω un chemin fermé partant du point unité E de la variété-groupe et \mathcal{S} une petite sphère de centre E , nous pourrions faire varier \mathcal{S} le long de ω en y appliquant les transformations correspondant aux points de ω . De retour à notre point de départ, la transformation redevient l'identité; l'orientation de \mathcal{S} ne s'est donc pas renversée pendant le parcours de la sphère \mathcal{S} . Deuxièmement, le groupe continu ne possédant pas de points fixes, la variété doit admettre des représentations en soi sans points fixes, voisines de l'identité. C'est pour cette raison que la sphère à deux dimensions ne peut être une variété-groupe. Une troisième condition nécessaire est que le groupe fondamental d'une variété-groupe soit abélien. En effet, soient a et b deux chemins fermés partant du point E ; si nous effectuons

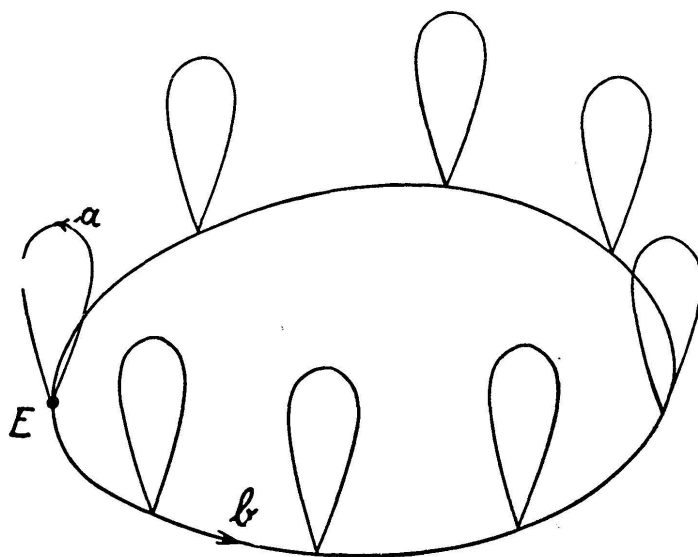


Fig. 8.

alors sur a la suite des transformations correspondant à tous les points de b , la courbe a revient à sa position primitive,

puisque la transformation revient à l'identité. Le chemin a peut donc être déformé dans le chemin bab^{-1} . Mais ceci signifie que les classes de chemins représentées par a et b sont permutable (fig. 8). Donc, parmi les surfaces fermées à deux dimensions le tore orientable entre seul en ligne de compte comme variété-groupe.

8. — GROUPES DE RECOUVREMENT.

Nous allons appliquer aux groupes continus la notion de recouvrement et montrerons que toute variété de recouvrement $\overline{\mathfrak{M}}$ d'un groupe continu \mathfrak{M} est encore un groupe continu $\overline{\mathfrak{M}}$. Il est nécessaire pour la démonstration de définir le produit de deux points \overline{A} et \overline{B} de $\overline{\mathfrak{M}}$, ce que nous ferons de la manière suivante: Nous choisissons un point \overline{E} au-dessus de E et relient \overline{E} à \overline{A} par un chemin \overline{a} . Soit a le chemin obtenu en calquant \overline{a} sur \mathfrak{M} et soit A son point final. Au-dessous de \overline{B} se trouve un point B . La transformation $X \rightarrow XB$ qui lui correspond transforme le chemin a en un chemin a' qui conduit de B à AB (fig. 9).

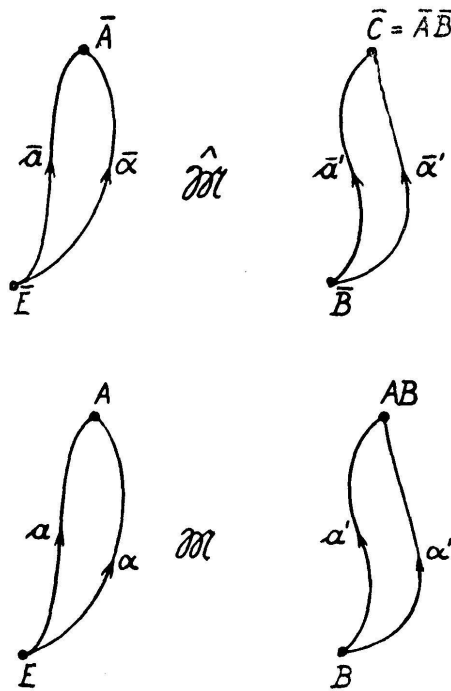


Fig. 9.

Soit \overline{a}' le chemin au-dessus de a' et partant du point \overline{B} . C'est son point final que nous appellerons le produit $\overline{C} = \overline{A}\overline{B}$. Cette

définition est indépendante du choix de \bar{a} : si au lieu d'effectuer la construction avec \bar{a} on partait d'un chemin $\bar{\alpha}$, allant également de \bar{E} à \bar{A} , les deux chemins $\bar{a}^{-1}\bar{\alpha}$ et $a^{-1}\alpha$ et par conséquent aussi le chemin $a'^{-1}\alpha'$ qui est engendré de $a^{-1}\alpha$ par la transformation B seraient des chemins fermés. Ces deux derniers chemins étant déformables l'un dans l'autre, puisque toute transformation B est une déformation, les deux chemins de recouvrement, $\bar{a}^{-1}\bar{\alpha}$ et $\bar{a}'^{-1}\bar{\alpha}'$ sont aussi déformables l'un dans l'autre. Puisque $\bar{a}^{-1}\bar{\alpha}$ est fermé, $\bar{a}'^{-1}\bar{\alpha}'$ le sera aussi. Donc, le point final de \bar{a}' est le même que celui de $\bar{\alpha}'$. Le produit \bar{C} est donc défini de façon univoque.

Pour démontrer complètement que $\bar{\mathfrak{M}}$ est une variété-groupe, il faudrait encore prouver que les axiomes du groupe sont satisfaits pour la multiplication des points de $\bar{\mathfrak{M}}$ que nous avons introduite. Nous ne nous y arrêterons pas.

Soit $\hat{\mathfrak{M}}$ la variété de recouvrement universelle de \mathfrak{M} . Si à tout point \bar{X} de $\hat{\mathfrak{M}}$ nous faisons correspondre le point situé au-dessous, X de \mathfrak{M} , nous faisons par là une représentation homéomorphe (mériédriquement isomorphe) du groupe $\hat{\mathfrak{M}}$ sur le groupe \mathfrak{M} . Car le produit $\bar{A}\bar{B}$ est au-dessus du produit A B. D'après le théorème d'homéomorphie de la théorie des groupes tous les points de $\hat{\mathfrak{M}}$, situés au-dessus de l'élément unité E de \mathfrak{M} , forment un sous-groupe invariant $\bar{\mathfrak{N}}$ de $\hat{\mathfrak{M}}$, et \mathfrak{M} est le groupe facteur

$$\mathfrak{M} = \hat{\mathfrak{M}} / \bar{\mathfrak{N}} .$$

Les points situés au-dessus d'un point A de \mathfrak{M} forment une classe de restes de ce groupe facteur. On a donc

$$\hat{\mathfrak{M}} = \bar{\mathfrak{N}} + \bar{\mathfrak{N}}\bar{A} + \bar{\mathfrak{N}}\bar{B} + \dots ,$$

où \bar{A} est un certain point au-dessus de A, \bar{B} au-dessus de B, etc. Les classes de restes forment un ensemble continu correspondant à l'ensemble continu des points de \mathfrak{M} . $\bar{\mathfrak{N}}$ est par contre un ensemble fini ou dénombrable d'éléments de $\hat{\mathfrak{M}}$.

La recherche de tous les groupes continus revient maintenant

- I^o à trouver tous les groupes simplement connexes et
- II^o à déterminer leurs sous-groupes invariants discontinus.

La dernière proposition se simplifie quand on se rappelle qu'un sous-groupe invariant discontinu appartient nécessairement au centre du groupe $\hat{\mathfrak{M}}$. Le fait que $\bar{\mathfrak{N}}$ est un sous-groupe invariant signifie que

$$\bar{A}^{-1} \bar{N}_1 \bar{A} = \bar{N}_2 ,$$

où \bar{N}_1 et \bar{N}_2 sont des éléments de $\bar{\mathfrak{N}}$ et \bar{A} un élément quelconque de $\hat{\mathfrak{M}}$. Si on pose en particulier $\bar{A} = \bar{E}$, on a $\bar{N}_2 = \bar{N}_1$. Si \bar{A} varie d'une manière continue alors que \bar{N}_1 reste fixe, \bar{N}_2 varie également en une manière continue. Mais, puisque nous avons au début $\bar{N}_2 = \bar{N}_1$, il en sera toujours ainsi, $\bar{\mathfrak{N}}$ étant un ensemble discontinu. \bar{N}_1 est par conséquent permutable avec chaque point \bar{A} de $\hat{\mathfrak{M}}$.

Le premier problème qui consistait à trouver tous les groupes simplement connexes peut être encore réduit. D'après un théorème de O. Schreier ¹ $\hat{\mathfrak{M}}$ est déjà complètement déterminé par un voisinage arbitrairement petit de l'élément unité \bar{E} . Un tel voisinage de l'élément unité est dit un *germe de groupe*. Deux groupes simplement connexes sont donc égaux dans toute leur étendue aussitôt qu'ils possèdent le même germe.

C'est la classification de tous les germes de groupes qui constitue le problème fondamental de la théorie de Lie. Il est vrai que nous devons encore faire certaines hypothèses de dérivabilité sur la variété-groupe, avant de pouvoir appliquer les théorèmes de Lie. Un des « problèmes parisiens » de D. Hilbert ² consiste à décider si ces hypothèses sont nécessaires ou bien satisfaites d'elles-mêmes. Ce problème a été très poussé ces dernières années, mais non pas complètement résolu.

Nous admettons qu'il existe dans le germe du groupe un système de coordonnées.

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

tel que les transformations du groupe possèdent des dérivées continues du deuxième ordre. En vertu du premier théorème principal de la théorie de Lie le germe du groupe peut être

¹ O. SCHREIER, Die Verwandtschaft stetiger Gruppen im grossen. *Abh. math. Semin. Hamburg. Univ.*, 5 (1927), p. 233-244.

² *Sur les Problèmes futurs des Mathématiques*, § V, Compte rendu du 2^e Congrès international des Mathématiciens, Paris, 1900, p. 78.

engendré par n transformations infinitésimales. Dans notre variété-groupe ces transformations seront données par n vecteurs

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$$

attachés au point \bar{E} ¹. Nous considérons maintenant l'ensemble de toutes les transformations infinitésimales du groupe; elles forment la *gerbe de vecteurs de support \bar{E}* . La transformation qu'on obtient à partir de deux de nos vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} par le symbole du crochet appartient d'après le deuxième théorème principal de Lie encore au groupe.

Revenons à l'exemple des rotations rigides de l'espace euclidien \mathfrak{R} autour d'un point fixe O . Un élément A de ce groupe est représenté analytiquement par une transformation orthogonale des coordonnées cartésiennes x_1, x_2, x_3 :

$$x'_i = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} x_k .$$

Le groupe étant d'ordre 3, les 9 coefficients α_{ik} dépendent de 3 paramètres a_1, a_2, a_3 . On peut choisir comme tels les trois composantes du vecteur que nous avons adjoint à la rotation. a_1, a_2, a_3 sont donc proportionnels aux cosinus directeurs de l'axe et la longueur du vecteur est égale à l'angle de rotation φ . Les paramètres sont alors des coordonnées de la variété-groupe, au moins dans le voisinage de l'élément unité $(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0)$. Nous n'avons pas besoin d'exprimer les α_{ik} par a_1, a_2, a_3 ni à donner explicitement la transformation de la variété-groupe \mathfrak{P} qui correspond à l'élément $A = (a_1, a_2, a_3)$.

Nous considérons le sous-groupe d'ordre 1 qui contient toutes les rotations autour d'un axe fixe. Le sous-groupe se figure par un segment de droite

$$a_i = u_i t, \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \leq \pi^2$$

de la variété-groupe \mathfrak{P} . La transformation infinitésimale qui engendre ce sous-groupe est donnée dans la variété-

¹ Des caractères gras désigneront dans ce qui suit des vecteurs.

g r o u p e \mathfrak{P} par le vecteur \mathbf{u} à composantes

$$\frac{da_i}{dt} = u_i ,$$

et dans l'espace euclidien \mathfrak{E} par la « rotation infinitésimale »

$$\frac{dx_1}{dt} = u_3 x_2 - u_2 x_3 = X_1 , \quad \frac{dx_2}{dt} = u_1 x_3 - u_3 x_1 = X_2 ,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = u_2 x_1 - u_1 x_2 = X_3 .$$

Le sens de ces équations est de donner, jusqu'aux membres d'ordre $(dt)^2$ près, les composantes du déplacement, $dx_1 = X_1 dt$, etc. d'un point, aussitôt qu'on connaît ses coordonnées x_1, x_2, x_3 et les valeurs $da_1 = u_1 dt$, $da_2 = u_2 dt$, $da_3 = u_3 dt$ des paramètres correspondant à la rotation, dite infinitésimale.

Soit maintenant

$$\frac{dx_1}{ds} = v_3 x_2 - v_2 x_3 = Y_1 , \quad \text{etc.}$$

une autre rotation infinitésimale. L'opération du crochet donne la rotation infinitésimale

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dr} &= \sum_i \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_i} Y_i - \frac{\partial Y_1}{\partial x_i} X_i \right) = \\ &= (u_2 v_1 - u_1 v_2) x_2 - (u_1 v_3 - v_1 u_3) x_3 , \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Cette rotation infinitésimale est représentée dans \mathfrak{P} par le vecteur.

$$\frac{da_1}{dr} = (u_3 v_2 - u_2 v_3) = w_1 , \quad \text{etc.}$$

C'est un vecteur que nous désignerons par

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} .$$

Choisissons pour engendrer notre groupe, les trois vecteurs

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0) , \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1, 0) , \quad \mathbf{u}_3 = (0, 0, 1) ,$$

correspondant à trois rotations infinitésimales autour de trois axes orthogonaux. Alors, on a

$$\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3, \quad \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2.$$

Ce que notre exemple nous a enseigné, c'est comment deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} déterminent complètement un troisième vecteur que nous pourrions appeler le *produit de \mathbf{u} et \mathbf{v}* . Ce produit satisfait aux règles de calcul suivantes :

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u},$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} + (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{u} + (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = 0 \quad (\text{Identité de Jacobi}).$$

Ce sont des formules douées d'un sens bien connu du calcul de vecteurs dans l'exemple des rotations rigides. Mais elles subsistent encore pour un groupe quelconque.

D'une manière tout à fait générale, nous appellerons *anneau infinitésimal* toute gerbe de vecteurs dans laquelle on a défini une multiplication satisfaisant à ces deux conditions. Il est clair que la classification de tous les anneaux infinitésimaux possibles est une affaire purement algébrique.

Si \mathbf{u}_i sont les transformations infinitésimales engendrant le germe du groupe il y aura alors $\frac{1}{2}n(n-1)$ relations

$$\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_k = \sum_{l=1}^n c_{ik}^l \mathbf{u}_l$$

par lesquelles l'anneau infinitésimal est complètement déterminé. Dans la théorie de Lie les c_{ik}^l sont appelés les *coefficients de structure*.

Supposons que nous ayons trouvé un anneau infinitésimal. Le troisième théorème principal de Lie nous permet d'en tirer un germe de groupe. Et de là on arrive à un groupe entier \mathfrak{M} d'après un théorème de E. Cartan, et par conséquent à un groupe simplement connexe $\hat{\mathfrak{M}}$. Finalement, en appliquant à $\hat{\mathfrak{M}}$ les sous-groupes invariants discontinus nous trouverons tous les autres groupes, ayant le même germe ¹.

¹ Pour les §§ 7 et 8, cf. E. CARTAN, La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs, *Mémoires des Sciences mathém.*, XLII (1934) et E. CARTAN, La topologie des espaces représentatifs des groupes de Lie, Conférence faite le 22 octobre 1935 dans le cycle des Conférences internationales des Sciences mathématiques organisées par l'Université de Genève. *L'Enseignement mathématique*, 1936.

9. — GROUPES À DEUX PARAMÈTRES.

Appliquons maintenant notre procédé de construction aux groupes d'ordre 2¹. Un groupe d'ordre 2 est engendré par deux transformations infinitésimales \mathbf{u} et \mathbf{v} . D'après le deuxième théorème principal, il existe une relation de la forme

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} ;$$

α et β sont les constantes de structure que nous venons de désigner par c_{ik}^l dans le cas des groupes d'ordre n . On peut satisfaire dans ce cas simple aux deux conditions de l'anneau infinitésimal pour tout couple α, β . Il suffit de poser $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\alpha \mathbf{u} - \beta \mathbf{v}$, et l'identité de Jacobi est satisfaite d'elle-même.

De combien de manières essentiellement différentes peut-on choisir α et β ? Nous verrons qu'il n'y en aura que deux.

I^{er} cas: Les deux coefficients sont nuls: $\alpha = \beta = 0$.

On a alors

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0 . \quad (\text{I})$$

II^{me} cas: Un coefficient au moins, disons α , est différent de 0. Il est alors possible d'introduire de nouveaux vecteurs fondamentaux

$$\mathbf{u}' = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}}{\alpha} .$$

En les introduisant dans la relation de définition de l'anneau infinitésimal, il vient

$$\mathbf{u}' \times \mathbf{v}' = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} = \mathbf{u}' \quad (\text{II})$$

(I) et (II) sont donc les seuls anneaux infinitésimaux essentiellement différents. De même il n'y aura donc que deux groupes d'ordre 2 simplement connexes, différents.

On trouve aisément pour le premier une réalisation par des transformations linéaires. Le fait que le symbole du crochet s'annule exprime la permutabilité des transformations infi-

¹ B. VON KERÉKJÁRTÓ, Geometrische Theorie der zweigliedrigen kontinuierlichen Gruppen. *Abhandl. Math. Semin. Hamburg Univ.*, 8 (1930), p. 107-114.

nitésimales de base, \mathbf{u} et \mathbf{v} . Il s'en suit que tout le groupe est abélien. Or, les translations du plan

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + a \\ y' &= y + b \end{aligned} \right\} \quad (\text{I}')$$

forment un groupe abélien d'ordre 2.

Et cette réalisation est déjà la réalisation régulière que seule nous avons jusqu'ici considérée. Le plan des a et b est la variété-groupe, $a = b = 0$ l'élément unité.

Pour obtenir une réalisation du deuxième cas rappelons-nous le groupe suivant de transformations linéaires à une variable

$$x' = ax + b \quad (a > 0) \quad (\text{II}')$$

Ce groupe d'ordre 2 n'est pas abélien; il est donc différent du groupe des translations, et comme il existe au plus deux groupes simplement connexes d'ordre 2, le groupe considéré doit appartenir au deuxième anneau infinitésimal. Ceci se voit d'ailleurs immédiatement. Car comme transformations infinitésimales engendrant le groupe on peut choisir deux transformations qui sont données sur la droite des x par

$$\frac{dx}{da} = x = X, \quad \frac{dx}{db} = 1 = Y.$$

Le symbole du crochet en déduit la transformation infinitésimale

$$(XY) = \frac{\partial X}{\partial x} Y - \frac{\partial Y}{\partial x} X = 1 = Y.$$

La variété-groupe est le demi-plan des a, b ($a > 0$), et l'élément unité E le point $a = 1, b = 0$. Les vecteurs de support E correspondant aux deux transformations infinitésimales, nous les désignons par

$$- \mathbf{v} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}$$

pour tomber directement sur la forme (II):

$$- (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u}.$$

Il n'y a dans ce groupe, l'élément unité excepté, aucun élément permutable avec tous les autres. Le centre est formé du seul élément unité, il n'a donc pas de sous-groupes invariants discontinus. Par conséquent, pour le groupe de germe (II), le groupe simplement connexe est le seul groupe qui existe.

Il en est autrement du cas (I). Ici, le sous-groupe invariant discontinu peut être formé ou bien du seul élément unité, ou bien du groupe discontinu de translations dans une, ou dans deux directions. On arrivera respectivement aux domaines fondamentaux des fonctions ou simplement périodiques ou doublement périodiques. Le groupe facteur relatif au sous-groupe invariant discontinu sera dans les deux cas

$$\left. \begin{array}{l} x' \equiv x + a \pmod{1} \\ y' = x + b \end{array} \right\} \text{groupe du cylindre}$$

ou

$$\left. \begin{array}{l} x' \equiv x + a \pmod{1} \\ y' \equiv y + b \pmod{1} \end{array} \right\} \text{translations du tore.}$$

La variété-groupe est dans le premier cas un cylindre infini dans les deux directions, dans le deuxième le tore. Nous avons vu plus haut que le tore était la seule surface fermée susceptible d'être une variété-groupe; nous venons de voir qu'en effet le tore est une variété-groupe. Il y a donc en tout trois groupes différents de germe (I).
