Stefan KACZMARZ und Hugo STEINHAUS. — **Theorie der Orthogonalreihen.** (Monografje Matematyczne, tome VI). — Un volume gr. in-8° de VI-300 pages. Prix: 5 dollars U.S.A. Seminar. Matem. Uniwers. Warsz. Oczki, Nr. 3. Warszawa-Lwow, 1935.

Les mathématiciens polonais poursuivent décidément une œuvre qui s'annonce gigantesque. Voici une théorie des séries orthogonales dont le modernisme n'efface nullement les attaches avec le passé, incontestablement glorieux, représenté par les recherches de Fourier et par celles de Sturm-Liouville. Ce qui caractérise l'esprit moderne est d'ailleurs facile à saisir. On ne construit plus rien sans dire dans quoi l'on construit, dans quel *espace*. Et, comme la notion *géométrique* d'espace n'est pas toujours saisissable, les espaces dans lesquels on opèrera, en général, seront *abstraits*. Les applications les rendront *distanciés* et même *métriques*, encore que ces points de vue ne soient point essentiels pour le jeu des développements matriciels.

Dans les préliminaires de l'ouvrage il faut particulièrement citer les théorèmes de *résonance* consistant en des indéterminations intégrales qui en permettent d'autres encore plus étendues; il me semble que c'est ainsi que le *quasi-analytique* peut proliférer.

L'orthogonalité est tout de suite intégrale et matricielle. Aux considérations trigonométriques ou issues d'équations différentielles du second ordre s'en adjoignent d'autres, très différentes au point de vue fonctionnel et cependant très voisines au point de vue logique. Tel est le système orthogonal de Rademacher qui repose sur l'expression d'un t continu dans le système binaire, d'où des fonctions $r_k(t)$ régies par l'alternance des chiffres 0 et 1, fonctions avec lesquelles on construit des intégrales en $r_m(t)\, r_n(t)\, dt$. Un système assez analogue a été construit par Haar sur le segment 0, 1 dans de certains assemblages formés sur une division de ce segment en 2^n parties. Il y a déjà ici une opposition très heureuse entre une certaine orthogonalité arithmétique et l'orthogonalité de fonctions, généralement continues, considérée beaucoup plus anciennement. Le passage, comme il est à prévoir, ne va pas sans considérations ensemblistes.

Les séries orthogonales en L^2 occupent un chapitre particulièrement important. Par L^2 il faut entendre un espace où la métrique est, pour ainsi dire, une généralisation *intégrale* de la distance euclidienne construite à l'aide d'un radical à indice 2. Il y a là des considérations souvent rattachées aux travaux de Hilbert mais qui, comme les auteurs du livre le montrent, ont eu antérieurement plusieurs formes annonciatrices. Il faut citer J. P. Gram, en 1879, puis Erhard Schmidt, en 1905, avec des formules d'orthogonalisation qui présentaient, par récurrence, une certaine extensibilité. Hermite, aidé de Stieltjes, puis Cayley et Kronecker pressentaient la prodigieuse importance du sujet sans prévoir, à coup sûr, ses aboutissements modernes en Mécanique ondulatoire.

La nature même de L^2 porte à y concevoir tout un ensemblisme qui pourrait, sans doute, être analysé plus géométriquement, ensemblisme où de simples conditions de fermeture semblent donner une foule de lemmes intégraux tels celui de Müntz. L'équation de Parseval et le lemme de Riesz-Fischer suivent aisément.

Voici un merveilleux chapitre de grands exemples. Equation et polynomes de Legendre. Polynomes de Tschebyscheff curieusement définis par un module maximum aussi petit que possible, dans un intervalle, et orthogonalisations correspondantes avec le secours d'un radical très simple. Développements adéquats. Le système de Haar est construit avec des préoccupations de convergence uniforme.

Le système de Rademacher porte à considérer des intégrales

$$\int_0^1 r_j(t)\, r_k(t) \ldots r_p(t)\, r_q(t)\, dt$$

généralement nulles mais égales à 1 pour $j = k$, $l = m$, ..., $p = q$. Il peut prendre une autre forme considérée par Walsh. Et tout ceci peut aboutir aux intégrales multiples des théories maxwelliennes, aux considérations ergodiques, aux théories cinétiques générales de la matière qui se recréeraient ici, à nouveau, si des intuitions incomplètes mais géniales n'avaient donné ce que nous devons maintenant à une méthode.

Il n'est pas besoin d'aller plus loin pour prouver que nous sommes en présence d'un grand, très grand ouvrage. Terminons brièvement quant à sa seconde moitié.

Convergence et sommabilité sont associées. Dans une série à structure orthogonale, la convergence dépend-elle, en général, de l'ordre des termes ? La question nécessite d'abord certaines considérations à la Lebesgue.

Voici maintenant, au delà des L^2, le cas des L^p. C'est aussi le difficile problème des développements quelconques à rattacher, si possible, au type orthogonal. Transmuer tous les développements en un type unique donnerait une allure idéale, sans doute chimérique, à la Physique théorique mais on peut rechercher jusqu'où il est loisible d'aller dans ce sens. Les séries et systèmes *lacunaires* sont inféodés à des particularités limites des L^p. Elles trahissent plutôt des structures relatives à ces L^p que des conditions qui y seraient introduites après coup.

Une autre généralisation, à peine sortie des limbes, est celle des systèmes biorthogonaux. Elle se rattache à la notion du *relativement* orthogonal.

Riche bibliographie où l'on s'étonne cependant de ne pas trouver certains noms, tels celui de M. Maurice Fréchet. Néanmoins production de premier ordre.

A. BUHL (Toulouse).

J.-L. WALSH. — **Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain.** (American Mathematical Society Colloquium Publications. Volume XX). — Un vol. gr. in-8° de x-382 pages. Prix: $ 5. Published by the American Mathematical Society. New-York, 1935.

Ce volume n'est pas sans analogie avec le précédent qui, par endroits, s'appuyait sur les travaux de J. L. Walsh. Il s'agit de la représentation par séries de polynomes, ce qui équivaut, sous des conditions très larges, à la représentation par séries de fonctions continues donc par séries de Fourier et analogues. Il y a d'ailleurs des polynomes trigonométriques. Certains noms dominent tous ces sujets tels celui de Tchebycheff, selon l'orthographe américaine, ou de Tschebyscheff selon l'orthographe polonaise. Ces analogies sont des plus remarquables et ont quelque chose de relativement rassurant. Qui ne s'est effrayé devant la floraison des théories modernes à apparences grandioses. Quel cerveau les analysera toutes ?