SUR UNE DÉMONSTRATION CLASSIQUE1 DE LA TRANSCENDANCE DU NOMBRE e

Autor(en): **Fiala, F. / Besse, J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-26617

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR UNE DÉMONSTRATION CLASSIQUE [1] DE LA TRANSCENDANCE DU NOMBRE e

PAR

F. FIALA et J. BESSE (Zurich).

---

1. — Dans ses recherches sur la fonction exponentielle, HERMITE [2] donne deux démonstrations de la transcendance de e, à savoir qu'une expression de la forme

$$N + N_1 e^a + N_2 e^b + \dots + N_n e^h \qquad (1)$$

ne peut pas être égale à zéro, $a, b, \dots, h$, étant des nombres entiers, $0 < a < b < \dots < h$, et $N, N_1, N_2, \dots, N_n$, des nombres entiers, non tous nuls.

Le but de ce travail est de rendre plus rigoureuse la première de ces démonstrations tout en la simplifiant (§ 4 et 5).

2. — Rappelons-en sommairement le début et posons

$$f(z) = z(z-a)(z-b)\dots(z-h) \,, \qquad (2)$$

$$F(z) = \frac{[f(z)]^\mu}{\mu!} \,, \qquad (3)$$

$$\mathcal{F}(z) = F(z) + F'(z) + F''(z) + \dots \qquad (4)$$

On vérifie aisément en intégrant par parties que

$$\mathcal{F}(o)\, e^t = \mathcal{F}(t) + e^t \int_0^t e^{-z} F(z)\, dz = \mathcal{F}(t) + \varepsilon_t \,. \qquad (5)$$

---

[1] Ce travail a été présenté au séminaire mathématique de l'Ecole polytechnique fédérale, à Zurich, semestre d'été 1935.

[2] Ch. HERMITE, *Œuvres*, publiées par E. Picard, t. III, 1912, p. 150-181.

On prend succcessivement $t = 0, a, b, ..., h$.

En multipliant la première égalité par N, la deuxième par N_1, ..., la $(n+1)$ ième par N_n et en additionnant, on obtient :

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(o)(N + N_1 e^a + N_2 e^b + \ldots + N_n e^h) \\ &= N\mathcal{F}(o) + N_1\mathcal{F}(a) + N_2\mathcal{F}(b) + \ldots + N_n\mathcal{F}(h) \\ &\quad + N_1\varepsilon_a + N_2\varepsilon_b + \ldots + N_n\varepsilon_h \,. \end{aligned} \tag{6}$$

Il est facile de voir que

1° $F(o), F(a), ..., F(h)$ sont entiers et avec eux la première ligne du second membre,

2° $\varepsilon_a, \varepsilon_b, ..., \varepsilon_n$ sont arbitrairement petits et avec eux la deuxième ligne du second membre, dès que μ est suffisamment grand.

La démonstration sera achevée si nous montrons que la première ligne du second membre est différente de 0, pour certains μ suffisamment grands. En effet, la somme d'un nombre entier différent de 0 et d'un nombre arbitrairement petit est différente de 0.

3. — Pour mettre en évidence l'exposant μ qui apparaît dans (3), nous remplaçons $F(z)$ par $F_\mu(z)$ et $\mathcal{F}(z)$ par $\mathcal{F}_\mu(z)$ en posant

$$F_\mu(z) = \frac{[f(z)]^\mu}{\mu!}$$

et

$$\mathcal{F}_\mu(z) = F_\mu(z) + F'_\mu(z) + F''_\mu(z) + \ldots\,.$$

Prenons pour μ les $n+1$ valeurs $\mu, \mu+1, \mu+2, ..., \mu+n$ et considérons le système des $n+1$ équations linéaires homogènes

$$\begin{aligned} &N\mathcal{F}_\mu(o) + N_1\mathcal{F}_\mu(a) + \ldots + N_n\mathcal{F}_\mu(h) = 0\,, \\ &N\mathcal{F}_{\mu+1}(o) + N_1\mathcal{F}_{\mu+1}(a) + \ldots + N_n\mathcal{F}_{\mu+1}(h) = 0\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &N\mathcal{F}_{\mu+n}(o) + N_1\mathcal{F}_{\mu+n}(a) + \ldots + N_n\mathcal{F}_{\mu+n}(h) = 0\,. \end{aligned}$$

Une au moins de ces relations sera impossible, si nous pouvons montrer que le déterminant

$$\Delta_\mu^* = \begin{vmatrix} \mathcal{F}_\mu(o) & \mathcal{F}_\mu(a) & \dots & \mathcal{F}_\mu(h) \\ \mathcal{F}_{\mu+1}(o) & \mathcal{F}_{\mu+1}(a) & \dots & \mathcal{F}_{\mu+1}(h) \\ \vdots & \vdots & & \\ \mathcal{F}_{\mu+n}(o) & \mathcal{F}_{\mu+n}(a) & \dots & \mathcal{F}_{\mu+n}(h) \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, le système ne possédant alors que la solution triviale $N = N_1 = \dots = N_n = 0$, que nous avons exclue par hypothèse.

On calcule la valeur de $\mathcal{F}_\mu(c)$ en intégrant de c à ∞ la relation

$$\left[e^{-z}\,\mathcal{F}_\mu(z)\right]' = -\,e^{-z}F_\mu(z)$$

$$\mathcal{F}_\mu(c) = e^c\int_c^\infty e^{-z}F_\mu(z)\,dz\,. \quad (c = 0\,,\ a\,,\ b\,,\ \dots,\ h)$$

En mettant dans chaque ligne de Δ_μ^*, $\frac{1}{\mu!}$, $\frac{1}{(\mu+1)!}$, ..., $\frac{1}{(\mu+n)!}$ en évidence et dans chaque colonne l'exponentielle correspondante, puis en soustrayant de chaque colonne la suivante, on est conduit au déterminant

$$\Delta_\mu = \begin{vmatrix} \int_0^a e^{-z}f^\mu dz & \int_a^b e^{-z}f^\mu dz & \dots & \int_g^h e^{-z}f^\mu dz & \int_h^\infty e^{-z}f^\mu dz \\ \int_0^a e^{-z}f^{\mu+1} dz & \int_a^b e^{-z}f^{\mu+1} dz & \dots & \int_g^h e^{-z}f^{\mu+1} dz & \int_h^\infty e^{-z}f^{\mu+1} dz \\ \vdots & & & & \\ \int_0^a e^{-z}f^{\mu+n} dz & \int_a^b e^{-z}f^{\mu+n} dz & \dots & \int_g^h e^{-z}f^{\mu+n} dz & \int_h^\infty e^{-z}f^{\mu+n} dz \end{vmatrix}$$

C'est ce déterminant que nous allons montrer être différent de 0.

4. — Hermite en évalue asymptotiquement les termes (pour μ très grand) à l'aide de la méthode de Laplace. Plus simplement

et tout à fait rigoureusement, nous nous servirons du théorème suivant [1]:

$\varphi(x)$ et $f(x)$ étant deux fonctions continues, dont aucune ne change de signe à l'intérieur de l'intervalle fini ou infini (a, b) et $\varphi(x)\left[f(x)\right]^n$ y étant intégrable pour tout $n > n_0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_a^b \varphi(x)\left[f(x)\right]^{n+1} dx}{\int_a^b \varphi(x)\left[f(x)\right]^{n} dx} = \mathrm{M}\,,$$

où M est la borne supérieure ou inférieure de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b), selon que $f(x)$ y est positif ou négatif.

Divisons chacune des n premières colonnes de Δ_μ par son premier terme et la $(n+1)$ième par son dernier terme. On reconnaît facilement qu'on peut appliquer la formule précédente au polynome

$$f(z) = z(z-a)(z-b)\ldots(z-h)$$

qui, ainsi que sa dérivée, n'a que des racines réelles.

Nous aurons

$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{\Delta_\mu}{\int_0^a e^{-z} f^\mu dz \cdot \int_a^b \ldots \int_g^h e^{-z} f^\mu dz \cdot \int_h^\infty e^{-z} f^{\mu+n} dz} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \\ f(p) & f(q) & \ldots & f(s) & 0 \\ \left[f(p)\right]^2 & \left[f(q)\right]^2 & \ldots & \left[f(s)\right]^2 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ \left[f(p)\right]^n & \left[f(q)\right]^n & \ldots & \left[f(s)\right]^n & 1 \end{vmatrix}$$

où $p, q, \ldots, s$ désignent les abscisses des maxima du module de $f(z)$ dans chacun des intervalles, $0 < p < a$, $a < q < b$, ..., $g < s < h$; $f(z)$ n'étant pas bornée supérieurement dans l'intervalle (h, ∞), il apparaît des zéros dans la dernière colonne.

Si cette limite est différente de 0, il y aura un μ_0 à partir duquel $(\mu > \mu_0)$ Δ_μ sera différent de 0.

---

[1] Voir POLYA et SZEGÖ, *Aufgaben aus der Analysis*, tome I, 2me section, nº 199, p. 78 et 243, où le théorème est attribué à CSILLAG.

5. — Cette limite est le déterminant de Vandermonde des quantités $f(p)$, $f(q)$, ..., $f(s)$, différent de 0 dès que ces quantités sont toutes différentes entre elles, ce que nous ne saurions affirmer *a priori.* Hermite prétend qu'elles le sont « en général »[1].

Examinons par exemple le cas où $a = 1$, $b = 2$, ..., $h = n$ (n impair) et faisons la substitution $z = t + \frac{n}{2}$,

$$f(z) = z(z - 1)(z - 2) \dots (z - n)$$

devient

$$f\left(t + \frac{n}{2}\right) = f^*(t)$$

$$= \left(t + \frac{n}{2}\right)\left(t + \frac{n}{2} - 1\right) \dots \left(t + \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{1}{2}\right) \dots \left(t - \frac{n}{2} + 1\right)\left(t - \frac{n}{2}\right).$$

C'est une fonction paire, $f^*(-t) = f^*(t)$, et deux valeurs extrêmes de $f^*(t)$ symétriques par rapport à la droite $t = 0$ sont égales.

Ce cas échappe à l'affirmation générale d'Hermite.

Mais nous n'avons jamais supposé les N, N_1, ..., N_n, tous différents de 0, ce qui heureusement nous permet de ramener le cas général au suivant:

$$a = 1 \, , \qquad b = 2 \, , \qquad \dots \, , \qquad h = 2k \qquad (k \text{ entier}) \, .$$

Appliquons de nouveau la substitution $z = t + k$;

$$f^*(t) = (t + k)(t + k - 1) \dots (t + 1)t(t - 1) \dots (t - k + 1)(t - k)$$

est une fonction impaire $f^*(-t) = -f^*(t)$ dont les valeurs extrêmes symétriques par rapport à la droite $t = 0$ sont égales en module, mais de signe contraire. D'autre part, le module des

---

[1] « Il en résulte qu'on ne peut, en général, admettre que le déterminant proposé Δ s'annule, car les quantités $P = f(p)$, $Q = f(q)$, ... fonctions entières semblables des racines p, q, ... de l'équation dérivée $f'(x) = 0$ seront comme ces racines différentes entre elles. » (HERMITE, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome 77, p. 77, Paris, 1873).

valeurs extrêmes de $f^*(t)$ dans chacun des intervalles croît avec la valeur absolue de t. On le voit à l'aide de la formule

$$\frac{f^*(t+1)}{f^*(t)} = \frac{(t+k+1)(t+k)\,\dots\,(t-k+1)}{(t+k)\,\dots\,(t-k+1)(t-k)} = \frac{t+k+1}{t-k}$$

et pour $0 < t < k$, t non entier

$$\frac{|f^*(t+1)|}{|f^*(t)|} = \frac{k+1+t}{k-t} > 1 \; .$$

Tous les $f(p)$, $f(q)$, ..., $f(s)$ sont donc différents entre eux.

C'est ce qu'il fallait démontrer pour prouver rigoureusement la transcendance de e par cette méthode.

6. — On reconnaît d'ailleurs dans la fonction $f^*(t)$ que nous venons d'étudier un produit partiel, à un facteur indépendant de t près, du développement de $\sin \pi t$ en produit infini, car on peut mettre $f^*(t)$ sous la forme

$$t(t^2-1)(t^2-2^2)(t^2-3^2)\,\dots\,(t^2-k^2) \; .$$

On voit donc qu'un produit partiel quelconque est formé d'oscillations dans chacun des intervalles $-k \leq i \leq t \leq i+1 \leq k$ (i entier), oscillations dont l'amplitude croît à mesure qu'on s'éloigne de l'origine.

C'est seulement à la limite qu'on obtient la courbe sinus à oscillations régulières.