2. Démonstration de la première partie du théorème II de Cournot.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1933)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Comme, d'autre part, le nombre des intervalles définis par (3) est égal au nombre des fractions de (4), chacun de ces intervalles contient une fraction de (4) et une seule. C. Q. F. D.

2. *Démonstration de la première partie du théorème II de Cournot.*

Soient s le nombre des épreuves, p la probabilité de l'événement A, $q = 1 - p$ celle de l'événement contraire B. On sait que la probabilité P (m, s) pour que l'événement A se réalise m fois au cours de s épreuves est donnée par la formule

$$\mathrm{P}(m\,,\,s) = \frac{s\,!}{m\,!\,(s-m)\,!}\,p^m q^{s-m}\ .$$

Supposons, avec Cournot, que le rapport du nombre des événements A à celui des événements B ou bien, ce qui revient au même, que le rapport $f = \frac{m}{s}$, fréquence relative de A, demeure constant, lorsqu'on multiplie les épreuves. Si $\frac{a}{c}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{m}{s}$, le nombre m parcourt la suite croissante des multiples an de a et le nombre s la suite croissante des multiples cn de c ($n = 1, 2, 3, ...$). Posons $1 - f = \frac{b}{c} = \frac{c-a}{c}$. Il suffit de montrer que

$$\frac{\mathrm{P}(a(n+1)\,,\,c(n+1))}{\mathrm{P}(an\,,\,cn)} < 1\ ,$$

quel que soit n.

Or, le premier membre de cette inégalité s'écrit

$$\frac{(cn+1)(cn+2)\,...\,(cn+c)\,p^a q^b}{(an+1)(an+2)\,...\,(an+a)\ \times\ (bn+1)(bn+2)\,...\,(bn+b)}$$

et comme [1]

$$p^a q^b \leqq \left(\frac{a}{c}\right)^a \left(\frac{b}{c}\right)^b ,$$

il suffit de montrer que le rapport

$$\frac{\left(n+\frac{1}{c}\right)\left(n+\frac{2}{c}\right)\,...\,(n+1)}{\left(n+\frac{1}{a}\right)\left(n+\frac{2}{a}\right)\,...\,(n+1)\ \times\ \left(n+\frac{1}{b}\right)\left(n+\frac{2}{b}\right)\,...\,(n+1)}$$

[1] R. DE MONTESSUS, *loc. cit.*, p. 53.

est inférieur à 1 ou à fortiori que le produit

$$\left(n + \frac{1}{c}\right)\left(n + \frac{2}{c}\right) \dots \left(n + \frac{c-2}{c}\right) \tag{5}$$

est inférieur à

$$\left(n + \frac{1}{a}\right)\left(n + \frac{2}{a}\right) \dots \left(n + \frac{a-1}{a}\right) \times \left(n + \frac{1}{b}\right)\left(n + \frac{2}{b}\right) \dots \left(n + \frac{b-1}{b}\right). \tag{6}$$

Or le théorème d'arithmétique s'applique non seulement aux suites (1), (2), (3), mais encore aux suites

$$n + \frac{1}{a}, \quad n + \frac{2}{a}, \quad \dots \quad n + \frac{a-1}{a}, \tag{1'}$$

$$n + \frac{1}{b}, \quad n + \frac{2}{b}, \quad \dots \quad n + \frac{b-1}{b}, \tag{2'}$$

$$n + \frac{1}{c}, \quad n + \frac{2}{c}, \quad \dots \quad n + \frac{c-1}{c}, \tag{3'}$$

puisque $c = a + b$ et que a et b sont premiers entre eux.

A chaque nombre $n + \frac{i}{c}$ de (3'), sauf le dernier $n + \frac{c-1}{c}$, faisons correspondre le nombre de (1') ou de (2') qui est situé dans l'intervalle $\left(n + \frac{i}{c}, \ n + \frac{i+1}{c}\right)$. A chaque fraction de (5) correspond alors un facteur plus grand de (6).

Donc (5) < (6) et la première partie du théorème II de Cournot est établie.

Quant à la deuxième partie du théorème II de Cournot, je n'ai pu la démontrer qu'en m'appuyant sur la formule sommatoire d'Euler. Je ne sais s'il en existe une démonstration plus simple et je me demande s'il serait possible de l'établir en partant de considérations arithmétiques analogues à celles qui m'ont permis de démontrer la première partie de ce théorème.

Octobre 1933.