1. Un théorème d'arithmétique.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1933)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Je ne m'occuperai ici que de la première partie du théorème de Cournot.

Il n'est pas difficile de la démontrer à l'aide de la formule de STIRLING[1]. Mais je ne sais si l'on a jamais cherché à l'établir d'une manière plus directe et plus naturelle. Je montrerai qu'elle se déduit très simplement d'un théorème d'arithmétique, certainement connu, dont la démonstration est immédiate.

1. *Un théorème d'arithmétique.*

Soient a et b deux nombres entiers premiers entre eux. Envisageons les suites

$$\frac{1}{a}, \quad \frac{2}{a}, \ldots \quad \frac{a-1}{a}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{b}, \quad \frac{2}{b}, \ldots \quad \frac{b-1}{b}, \tag{2}$$

$$\frac{1}{a+b}, \quad \frac{2}{a+b}, \ldots \quad \frac{a+b-1}{a+b}. \tag{3}$$

La suite (3) définit $a + b - 2$ intervalles. Je dis que chacun de ces intervalles contient au sens étroit l'une des fractions (1) ou (2) et une seule.

Démonstration. Rangeons l'ensemble des fractions (1) et (2) par ordre de grandeur croissante. Nous obtiendrons une suite nouvelle, que j'appellerai suite (4), qui contiendra $a + b - 2$ fractions toutes distinctes, puisque par hypothèse a est premier à b. Je dis que deux fractions de (4) qui se succèdent sont toujours séparées par une fraction (3).

En effet, lorsque les deux fractions du couple appartiennent soit à (1), soit à (2), la propriété est évidente, puisque chacune des fractions $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ est supérieur à $\frac{1}{a+b}$. Si, au contraire, l'une des fractions du couple $\left(\frac{\alpha}{a}\right)$ fait partie de (1), et l'autre $\left(\frac{\beta}{b}\right)$ de (2), elles sont séparées par la médiante $\frac{\alpha+\beta}{a+b}$, puisque les différences $\frac{\alpha+\beta}{a+b} - \frac{\alpha}{a}$, $\frac{\alpha+\beta}{a+b} - \frac{\beta}{b}$ sont de signes contraires.

[1] Cf. R. DE MONTESSUS, *Leçons élémentaires sur le Calcul des probabilités*, Paris. Gauthier-Villars, 1908. Comme me l'a fait remarquer M. Samuel DUMAS, les inégalités initiales (n° 44 de l'ouvrage cité, p. 53, lignes 4 et 8), pourtant exactes, doivent être remplacées par des inégalités de sens contraire, si l'on veut arriver à la relation finale.

Comme, d'autre part, le nombre des intervalles définis par (3) est égal au nombre des fractions de (4), chacun de ces intervalles contient une fraction de (4) et une seule. C. Q. F. D.

2. *Démonstration de la première partie du théorème II de Cournot.*

Soient s le nombre des épreuves, p la probabilité de l'événement A, $q = 1 - p$ celle de l'événement contraire B. On sait que la probabilité P (m, s) pour que l'événement A se réalise m fois au cours de s épreuves est donnée par la formule

$$\mathrm{P}(m\,,\ s) = \frac{s\,!}{m\,!\ (s - m)\,!}\,p^m q^{s-m}\ .$$

Supposons, avec Cournot, que le rapport du nombre des événements A à celui des événements B ou bien, ce qui revient au même, que le rapport $f = \frac{m}{s}$, fréquence relative de A, demeure constant, lorsqu'on multiplie les épreuves. Si $\frac{a}{c}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{m}{s}$, le nombre m parcourt la suite croissante des multiples an de a et le nombre s la suite croissante des multiples cn de c $(n = 1, 2, 3, ...)$. Posons $1 - f = \frac{b}{c} = \frac{c - a}{c}$. Il suffit de montrer que

$$\frac{\mathrm{P}(a(n + 1)\,,\ c(n + 1))}{\mathrm{P}(an\,,\ cn)} < 1\ ,$$

quel que soit n.

Or, le premier membre de cette inégalité s'écrit

$$\frac{(cn + 1)(cn + 2)\ \ldots\ (cn + c)\,p^a q^b}{(an + 1)(an + 2)\ \ldots\ (an + a)\ \times\ (bn + 1)(bn + 2)\ \ldots\ (bn + b)}$$

et comme [1]

$$p^a q^b \leqq \left(\frac{a}{c}\right)^a \left(\frac{b}{c}\right)^b ,$$

il suffit de montrer que le rapport

$$\frac{\left(n + \frac{1}{c}\right)\left(n + \frac{2}{c}\right)\ \ldots\ (n + 1)}{\left(n + \frac{1}{a}\right)\left(n + \frac{2}{a}\right)\ \ldots\ (n + 1)\ \times\ \left(n + \frac{1}{b}\right)\left(n + \frac{2}{b}\right)\ \ldots\ (n + 1)}$$

[1] R. de Montessus, *loc. cit.*, p. 53.