

III. — Images de domaines du plan des z DANS LE PLAN DES w .

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1933)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

III. — IMAGES DE DOMAINES DU PLAN DES z
DANS LE PLAN DES w .

Nous rechercherons les images de quelques domaines du plan des z limités par des segments de courbes régulières et simples.

1. Image d'un secteur plan du plan des z limité par deux rayons vecteurs.

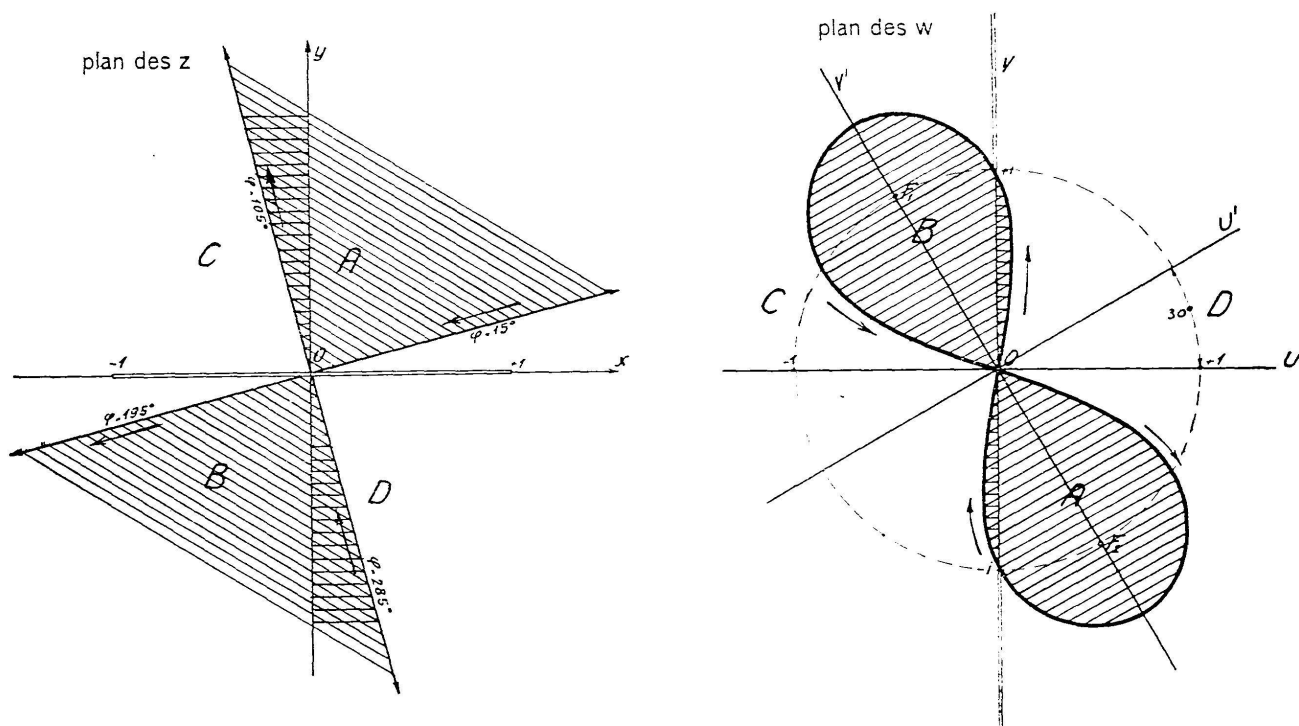


Fig. 3.

Il est nécessaire de déterminer d'abord les images des rayons vecteurs du plan des z dans le plan des w . On pose

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (\text{Fig. 3})$$

ce qui, introduit dans (2), nous donne

$$w = u + vi = \frac{1}{\sqrt{r^2 \cos 2\varphi - 1 + ir^2 \sin 2\varphi}}$$

Si l'on sépare le réel de l'imaginaire, on a

$$\begin{aligned} u^2 - v^2 &= \frac{r^2 \cos 2\varphi - 1}{r^4 - 2r^2 \cos 2\varphi + 1} \\ 2uv &= \frac{-r^2 \sin 2\varphi}{r^4 - 2r^2 \cos 2\varphi + 1} \end{aligned} \quad (10)$$

En éliminant le paramètre r de ces deux équations, on a l'équation de l'image d'un rayon vecteur du plan des z

$$f(u, v) = (u^2 + v^2)^2 + u^2 - v^2 + 2uv \cotg 2\varphi = 0. \quad (11)$$

Si φ est considéré comme variable, l'équation (11) représente un faisceau de lemniscates, qui toutes ont leur point double à l'origine et passent par les points $\omega = \pm i$, car cette équation est, indépendamment de φ , satisfaite pour les valeurs

$$\begin{aligned} u &= 0 & v &= 0 \\ u &= 0 & v &= \pm 1. \end{aligned} \quad (\text{Fig. 5})$$

Les points $\omega = 0$ et $\omega = \pm i$ sont les images de $z = \infty$ et $z = 0$, points par lesquels passent tous les rayons vecteurs du plan des z .

Nous excluons les cas $\varphi = k \frac{\pi}{2}$ ($k = 0, 1, 2, 3$), ils représentent les axes de coordonnées du plan des z , dont nous avons déterminé les images dans ce qui précède.

Les images de quatre rayons vecteurs orthogonaux du plan des z sont déterminées par une seule équation (fig. 3). Les phases de ces quatre rayons vecteurs sont liées par la relation suivante

$$\varphi = \varphi_1 + k \frac{\pi}{2}$$

dans laquelle φ_1 représente un angle aigu, et k l'un des nombres 0, 1, 2, 3, et on a

$$\cotg 2\varphi = \cotg 2\varphi_1.$$

Pour les quatre rayons vecteurs, le coefficient de uv est le même, et les autres coefficients sont indépendants de φ .

On a le faisceau complet des images quand on fait varier φ de 0 à $\frac{\pi}{2}$ dans l'équation (11). En nous en tenant à cette inter-

valle, nous pouvons encore formuler la loi suivante. Considérons dans le premier quadrant du plan des z , deux rayons vecteurs symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle des axes.

On a pour le rayon vecteur (1)

$$\varphi = \varphi_1 ,$$

et pour le rayon vecteur (2)

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi_1 .$$

D'après l'équation (11), l'équation de l'image de (1) sera

$$(u^2 + \varphi^2)^2 + u^2 - \varphi^2 + 2u\varphi \cotg 2\varphi_1 = 0 \quad (a)$$

et celle de l'image de (2) sera à cause de $\cotg 2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) = -\cotg 2\varphi_1$

$$(u^2 + \varphi^2)^2 + u^2 - \varphi^2 - 2u\varphi \cotg 2\varphi_1 = 0 . \quad (b)$$

Déterminons la courbe symétrique de (b), par rapport à l'axe des u ou par rapport à celui des φ , au moyen de la transformation

$$u = u' ; \quad \varphi = -\varphi' ; \quad \text{ou} \quad u = -u' ; \quad \varphi = \varphi'$$

et nous obtenons l'équation (a). Donc le faisceau des images des rayons vecteurs pour lesquels on a $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ est respectivement le symétrique, par rapport aux axes des u et des φ , du faisceau des images des rayons vecteurs pour lesquels on a $\frac{\pi}{4} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$. Il suffit donc de faire varier l'angle dans l'intervalle $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ pour avoir tous les types d'images.

Nous considérons désormais l'image d'un rayon vecteur dans l'intervalle $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{4}$; $\sin 2\varphi$, $\cos 2\varphi$ et $\cotg 2\varphi$ sont alors positifs.

Effectuons une rotation, égale à l'angle aigu α , au système de coordonnées du plan des ω , de telle sorte que l'on ait

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - \sin 2\varphi}{2}} ; \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \sin 2\varphi}{2}} . \quad (12)$$

Les formules de transformation y relatives deviennent

$$u = u' \sqrt{\frac{1 + \sin 2\varphi}{2}} - \varphi' \sqrt{\frac{1 - \sin 2\varphi}{2}},$$

$$\varphi = u' \sqrt{\frac{1 - \sin 2\varphi}{2}} + \varphi' \sqrt{\frac{1 + \sin 2\varphi}{2}}.$$

L'équation (11) devient alors

$$f(u, \varphi) = (\varphi'^2 + u'^2)^2 - \frac{\varphi'^2 - u'^2}{\sin 2\varphi} = 0. \quad (13)$$

Nous avons là l'équation d'une lemniscate de la forme

$$(\varphi'^2 + u'^2)^2 - 2c^2(\varphi'^2 - u'^2) = 0$$

dont les foyers F_1 et F_2 sont sur l'axe des φ' . Leur distance à l'origine est

$$c = \frac{1}{\sqrt{2 \sin 2\varphi}}. \quad (14)$$

Pour de très petites valeurs de φ , cette distance est très grande. Lorsque φ croît dans l'intervalle $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, c décroît et passe par un minimum égal à $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ pour $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

L'image dans le plan des ω , d'un rayon vecteur du plan des z , est donc un arc de lemniscate. Examinons le cas spécial suivant:

Image du rayon vecteur de phase $\varphi = 15^\circ$.

Pour construire la lemniscate correspondante il suffit de connaître l'angle de rotation α , et la distance c des foyers à l'origine. On a $\sin 2\varphi = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

D'après (12) on a $\sin \alpha = \frac{1}{2}$; donc $\alpha = 30^\circ$ et, d'après (14) on a

$$c = 1.$$

Nous avons à faire effectuer une rotation de 30° au système d'axes du plan des ω , et à construire dans ce nouveau système d'axes (u', φ') , la lemniscate

$$(\varphi'^2 + u'^2)^2 - 2(\varphi'^2 - u'^2) = 0. \quad (\text{Fig. 3}).$$

Les images des rayons vecteurs $\varphi = 105^\circ$, $\varphi = 195^\circ$, $\varphi = 285^\circ$ ont la même équation. L'image des quatre rayons vecteurs orthogonaux se forme de la manière suivante.

Supposons un point z , venant de l'infini en suivant le rayon vecteur de phase $\varphi = 15^\circ$, pour arriver au point o du bord supérieur de la coupure. Comme les points situés à l'intérieur du premier quadrant du plan des z ont pour image les points situés dans le quatrième quadrant du plan des ω , l'image ω de ce point parcourt l'arc de la lemniscate situé dans le quatrième quadrant de $\omega = 0$ à $\omega = -i$; le point z se déplaçant ensuite sur le rayon vecteur de phase $\varphi = 105^\circ$, depuis le point O du bord supérieur de la coupure jusqu'à l'infini, son image ω se déplace sur l'arc de lemniscate situé dans le troisième quadrant de $\omega = -i$ à $\omega = 0$. Le point z , revenant alors de l'infini, en parcourant le rayon vecteur de phase $\varphi = 285^\circ$ jusqu'au point O du bord inférieur de la coupure, son image ω se déplace sur l'arc de lemniscate situé dans le premier quadrant de $\omega = 0$ à $\omega = +i$. Enfin, le point z retournant à son point de départ $z = \infty$, en suivant le rayon vecteur de phase $\varphi = 195^\circ$, son image ω se déplace, sur l'arc de lemniscate, dans le deuxième quadrant de $\omega = +i$ à son point de départ $\omega = 0$. Le point z a ainsi décrit une courbe fermée avec un point double à l'infini. Son image, dans le plan des ω est aussi une courbe fermée avec un point double à l'origine, image du point double du plan des z .

Examinons encore les images des domaines déterminés par ces rayons vecteurs (fig. 3).

Le quadrant A, compris entre les rayons vecteurs $\varphi = 15^\circ$ et $\varphi = 105^\circ$, est situé, selon la direction donnée par le point mobile considéré, à la droite de la courbe parcourue. Son image sera donc à l'intérieur de la boucle inférieure de la lemniscate, car cet intérieur est aussi à la droite de la courbe.

De même, le quadrant B, compris entre les rayons vecteurs $\varphi = 195^\circ$ et $\varphi = 285^\circ$, a son image dans la boucle supérieure de la lemniscate, car les deux domaines sont à la gauche des courbes. Les domaines simplement et doublement hachés se correspondent. Le quadrant C, limité par les rayons vecteurs $\varphi = 105^\circ$, $\varphi = 195^\circ$, et la coupure $-1, 0$, a pour image la partie non hachée du demi-plan gauche des ω , et le quadrant D,

limité par les rayons vecteurs $\varphi = 15^\circ$, $\varphi = 285^\circ$ et la coupure $0, +1$, a pour image la partie non hachée du demi-plan droit des w .

Il est aussi facile de déterminer l'image d'un secteur du plan des z compris entre deux rayons vecteurs quelconques.

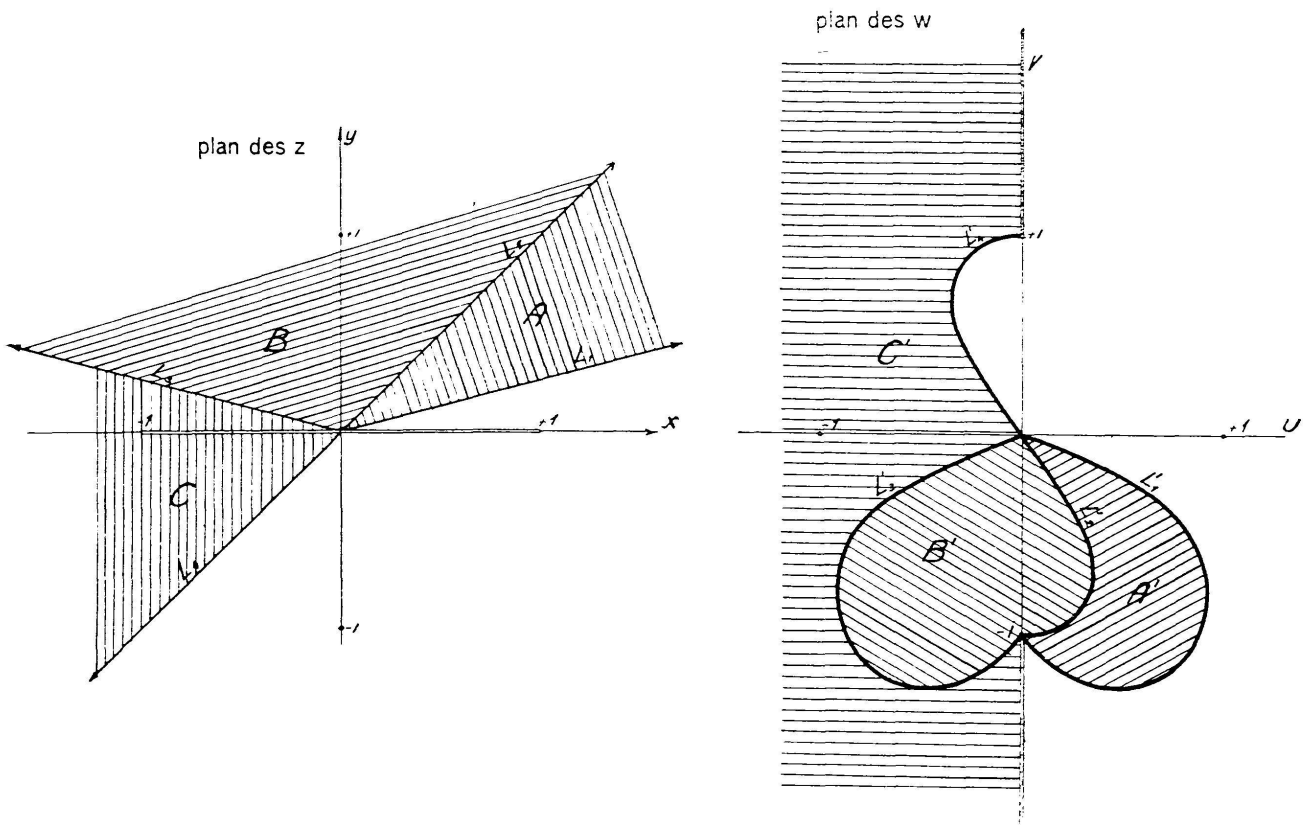


Fig. 4.

Un secteur limité par deux rayons vecteurs, partant tous deux du point O du bord supérieur, ou du point O du bord inférieur, de la coupure, a pour image un domaine fini, limité par deux arcs de lemniscate, par exemple les secteurs A et B dans la figure 4.

Par contre, si l'un des rayons vecteurs part du point O du bord supérieur, et l'autre du point O du bord inférieur, il faut encore ajouter aux limites du secteur, la coupure $-1, 0$ ou $0, +1$. La courbe, limitant l'image d'un tel secteur, est alors composée de deux arcs de lemniscate, plus le bord gauche ou droit de la coupure $-i, \infty, +i$ du plan des w (par exemple le secteur C dans la figure 4).

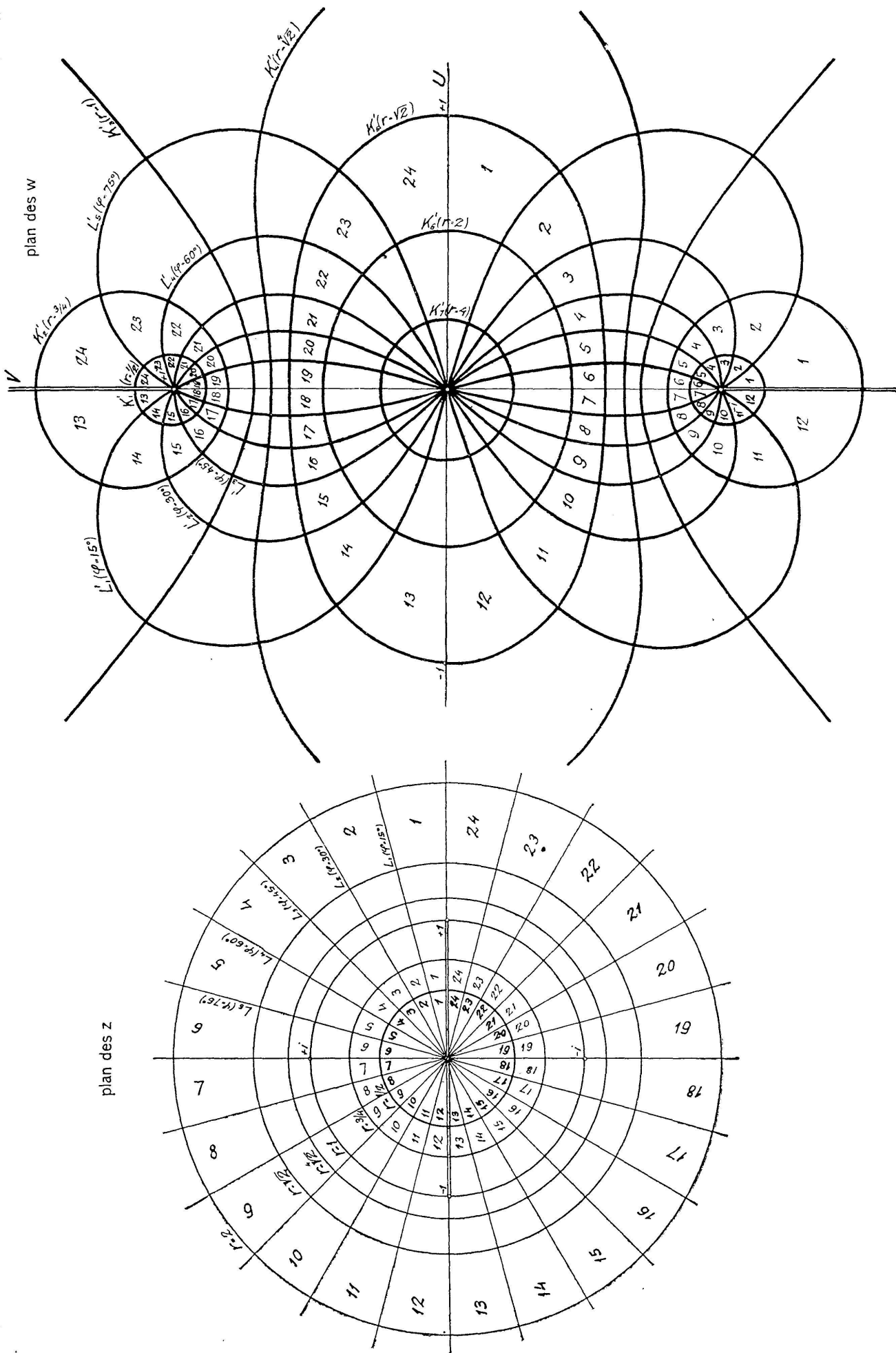


Fig. 5.

Les images des rayons vecteurs pour lesquels on a

$$\varphi = n \left(15^\circ + k \frac{\pi}{2} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3; \quad n = 1, 2, 3, 4, 5$$

sont représentées par la figure 5.

2. — *Images de cercles concentriques dont le centre est à l'origine du plan des z .*

L'équation d'un tel cercle est donnée par

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi); \quad r = \text{const.} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (5)$$

Si l'on introduit (5) en (2), en séparant le réel de l'imaginaire, on a de nouveau les équations (10). L'élimination du paramètre φ , entre ces deux équations, donne l'équation de l'image d'un tel cercle:

$$(r^4 - 1)(u^2 + v^2)^2 - 2(u^2 - v^2) = 1. \quad (15)$$

Il y a trois cas à considérer:

$$r \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 1.$$

I. $r > 1$. — L'équation (15) peut s'écrire

$$(u^2 + v^2)^2 - \frac{2}{r^4 - 1}(u^2 - v^2) = \frac{1}{r^4 - 1}. \quad (15a)$$

Nous avons là l'équation d'une courbe de Cassini de la forme

$$(u^2 + v^2)^2 - 2c^2(u^2 - v^2) = q^4 - c^4.$$

Dans ce cas on a

$$c = \frac{1}{\sqrt{r^4 - 1}}, \quad q = \frac{r}{\sqrt{r^4 - 1}} = rc. \quad (16)$$

Pour $r > 1$, on a $q > c$.

c est la distance des foyers F_1 et F_2 à l'origine, et en tout point P d'une courbe de Cassini on a $PF_1 \cdot PF_2 = q^2$.

L'image de la circonférence d'un cercle, extérieur au cercle unité du plan des z , est une courbe de Cassini dont les propriétés

sont les suivantes. Les foyers F_1 et F_2 sont sur l'axe des u ; lorsque r croît, ils se rapprochent de l'origine, et au cas limite où $r = \infty$, ils coïncident avec l'origine.

Pour

$$1 < r < \sqrt{2} \quad \text{on a} \quad c < q < \sqrt{2} \cdot c .$$

On sait que si q est choisi dans cet intervalle, les courbes de Cassini s'infléchissent dans la direction de l'axe des v . Cette propriété est représentée dans la figure 5 par le cas

$$r = \sqrt[4]{2} .$$

Pour

$$r \geq \sqrt{2} , \quad \text{on a} \quad q \geq \sqrt{2} \cdot c .$$

Dans ce cas, les courbes de Cassini sont des ovaes ressemblant aux ellipses. Les cas $r = \sqrt[4]{2}, 2, 4$ sont représentés sur la figure 5.

II. $r = 1$. — L'équation (15) devient

$$\frac{\varrho^2}{\frac{1}{2}} - \frac{u^2}{\frac{1}{2}} = 1 . \quad (15b)$$

Nous avons là l'équation d'une hyperbole équilatère. Ses sommets sont sur l'axe des v , et ses axes sont $a = b = \frac{1}{2} \sqrt{2}$. Elle est représentée sur la figure 5 par la courbe $K'_3 (r = 1)$.

III. $r < 1$. — L'équation (15) peut s'écrire

$$(u^2 + \varrho^2)^2 - \frac{2}{1 - r^4} (\varrho^2 - u^2) = - \frac{1}{1 - r^4} . \quad (15c)$$

Nous avons de nouveau là l'équation d'une courbe de Cassini avec

$$c = \frac{1}{\sqrt{1 - r^4}} , \quad q = \frac{r}{\sqrt{1 - r^4}} = rc ,$$

$r < 1$ entraîne $q < c$.

Les courbes de Cassini correspondantes sont composées d'ovales séparés. Les cercles, situés à l'intérieur du cercle unité du plan des z , sont partagés en deux parties égales par la coupure

— 1, + 1 (fig. 5). Les deux demi-cercles séparés ont pour image des courbes de Cassini dont les propriétés sont les suivantes. Les foyers F_1 et F_2 sont sur l'axe des ν , et s'éloignent des points $\pm i$ lorsque r ($0 < r < 1$) croît. Les courbes sont formées par deux ovales séparés. Les cas pour $r = \frac{1}{2}$ et $r = \frac{3}{4}$ sont représentés sur la figure 5.

Il est facile de déterminer, à l'aide de la figure 5, les images des couronnes limitées par les cercles concentriques du plan des z . Les domaines portant la même numérotation dans les deux plans se correspondent. En résumé nous pouvons dire:

L'image des rayons vecteurs du plan des z , est un faisceau de lemniscates, dont l'axe de symétrie passe par l'origine du plan des ω , et effectue une rotation continue autour de ce point. Leurs seuls points d'intersection sont les points $\omega = 0$, $\omega = \pm i$. Le faisceau de cercles concentriques intérieurs au cercle unité du plan des z , a pour image un faisceau de courbes de Cassini, dont les foyers sont sur l'axe des ν , et le faisceau de cercles concentriques extérieurs au cercle unité a pour image un faisceau de courbes de Cassini, dont les foyers sont sur l'axe des u . L'image du cercle unité lui-même est une hyperbole équilatère.

Les rayons vecteurs et les cercles concentriques du plan des z forment un système de trajectoires orthogonales; les lemniscates et les courbes de Cassini avec l'hyperbole équilatère, doivent aussi former un système de trajectoires orthogonales, en vertu de la conformité de la transformation (2). Cette propriété est illustrée par la figure 5.

3. — *Domaines du plan des z dont les images sont des secteurs du plan des w .*

Nous partons de la fonction inverse

$$z = \frac{\sqrt{\omega^2 + 1}}{\omega} \quad (3)$$

et nous posons

$$z = x + yi ; \quad (5) \quad \omega = R (\cos \Phi + i \sin \Phi) . \quad (8)$$

Un rayon vecteur du plan des w est représenté par

$$\Phi = \text{const.}, \quad 0 \leq R \leq \infty. \quad (\text{Fig. 6})$$

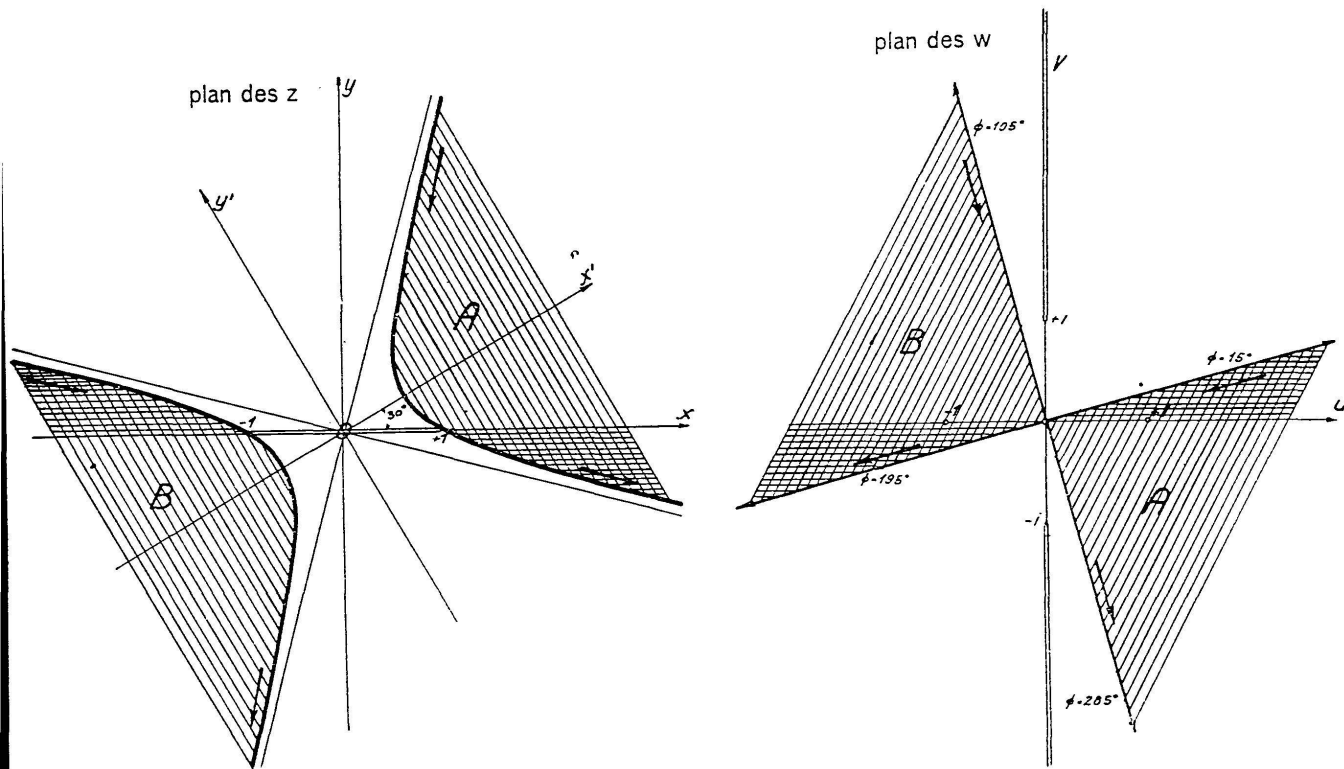


Fig. 6.

En introduisant (5) et (8) en (3) et en séparant le réel de l'imaginaire, on a

$$x^2 - y^2 = \frac{R^2 + \cos 2\Phi}{R^2}; \quad 2xy = -\frac{\sin 2\Phi}{R^2}. \quad (18)$$

Nous avons la courbe cherchée du plan des z en éliminant le paramètre R de ces deux équations.

$$x^2 - y^2 + 2xy \cotg 2\Phi - 1 = 0; \quad (19)$$

c'est une hyperbole équilatère. Ici apparaît une propriété analogue à celle que nous avons constatée en (16):

Quatre rayons vecteurs orthogonaux dont les phases sont de la forme

$$\Phi = \Phi_1 + k\frac{\pi}{2}; \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad (\text{Fig. 6.})$$

ont pour image la même section conique. On a le faisceau entier des courbes en faisant varier Φ dans l'intervalle $0 < \Phi \leq \frac{\pi}{4}$, car le faisceau de courbes relatif à l'intervalle $\frac{\pi}{4} \leq \Phi < \frac{\pi}{2}$, est le symétrique du premier par rapport à l'axe des x ou à celui des y . Nous faisons de nouveau effectuer au système de coordonnées du plan des z , une rotation égale à l'angle aigu α , au moyen des expressions suivantes

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - \sin 2\Phi}{2}} ; \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \sin 2\Phi}{2}} . \quad (20)$$

Les formules de transformation y relatives transforment (19) en

$$\frac{x'^2}{\sin 2\Phi} - \frac{y'^2}{\sin 2\Phi} = 1 . \quad (\text{Fig. 8}) \quad (21)$$

Nous avons là l'équation d'une hyperbole équilatère. Ses axes sont $a = b = \sqrt{\sin 2\Phi}$; ses asymptotes sont les droites $y = tg(-\Phi).x$ et $y = tg(90 - \Phi).x$; ses sommets sont sur l'axe des x' . L'équation (19) nous indique que toutes les hyperboles de ce faisceau se coupent aux points ± 1 de l'axe des x .

Un système d'hyperboles équilatères du plan des z a pour image les rayons vecteurs du plan des ω . Nous allons considérer le cas spécial suivant

$$\Phi = 15^\circ \quad (\text{Fig. 6.}), \quad \text{on a} \quad \sin 2\Phi = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} ;$$

$$\alpha = 30^\circ \quad a = b = \frac{1}{2} \sqrt{2} .$$

Les rayons vecteurs $\Phi = 15^\circ, 105^\circ, 195^\circ, 285^\circ$ sont les images d'une seule hyperbole. L'image des branches de l'hyperbole peut être déterminée de la manière suivante. Supposons qu'un point z se déplace sur l'hyperbole dans le premier quadrant, et vienne de l'infini au point $+1$; son image ω se déplace sur le rayon vecteur $\Phi = 285^\circ$, dans le quatrième quadrant de l'origine à l'infini. Le point z , se déplaçant encore sur la même branche, dans le quatrième quadrant, et partant du point $+1$ pour l'infini, son image ω se déplace sur le rayon vecteur $\Phi = 15^\circ$, et revient de l'infini à l'origine. Le point z , continuant son déplacement sur

l'autre branche de l'hyperbole, dans le deuxième quadrant, et revenant de l'infini au point -1 , son image part de l'origine à l'infini sur le rayon vecteur $\Phi = 195^\circ$. Finalement le point z , parcourant la même branche d'hyperbole dans le troisième quadrant, et partant de $z = -1$ pour l'infini, son image w revient de l'infini à l'origine sur le rayon vecteur $\Phi = 105^\circ$.

Le domaine A, intérieur à la première branche de l'hyperbole a pour image le quadrant A', compris entre les rayons vecteurs $\Phi = 15^\circ$ et $\Phi = 285^\circ$. Chacun des deux domaines est à la gauche de la courbe parcourue. Le domaine B, intérieur à la deuxième

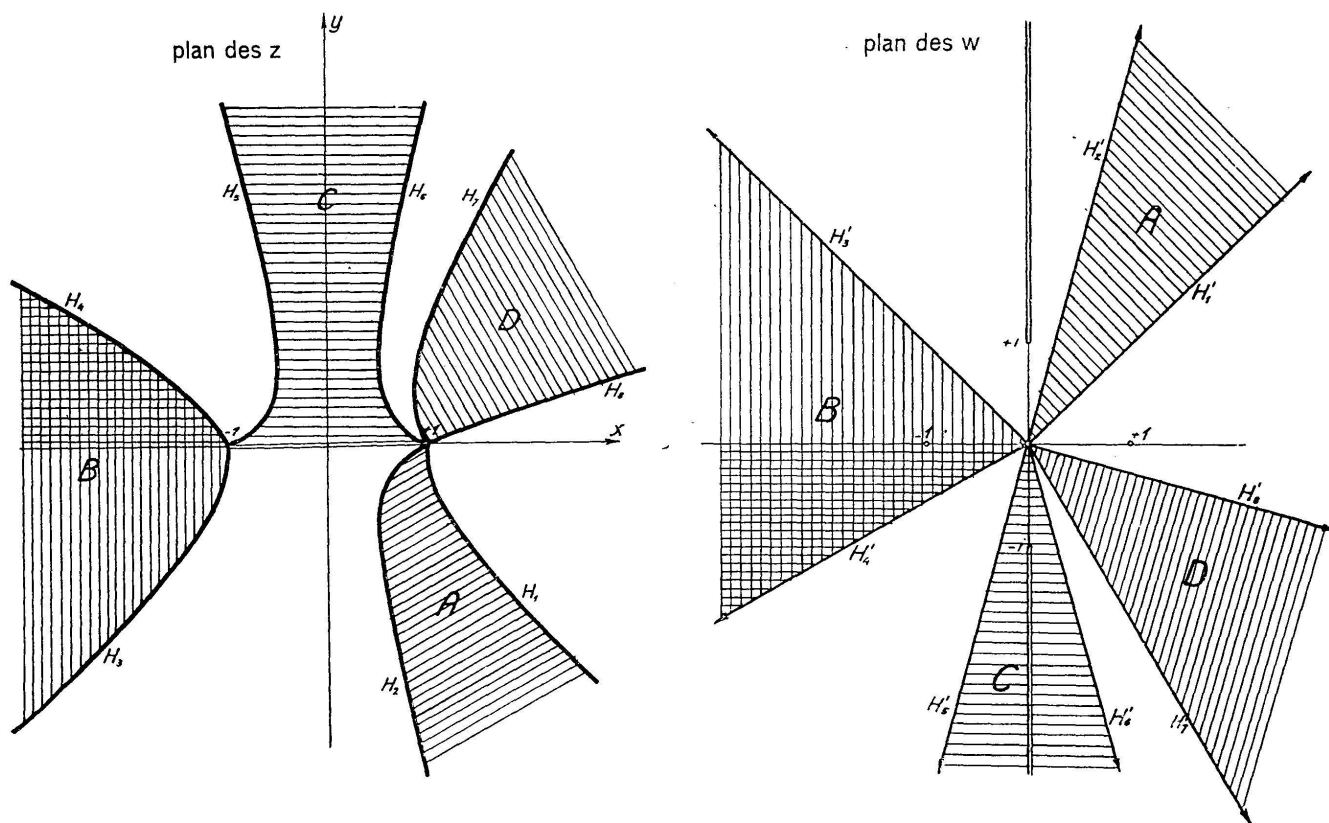


Fig. 7.

branche de l'hyperbole, a pour image le quadrant B', compris entre les rayons vecteurs $\Phi = 105^\circ$ et $\Phi = 195^\circ$. Les domaines simplement et doublement hachés se correspondent encore respectivement. L'image de chaque hyperbole du système considéré se détermine de la même manière.

Un domaine du plan des z , limité par des branches d'hyperbole du système (19), a pour image un secteur du plan des w (Fig. 7).

La fig. 8 représente les rayons vecteurs du plan des ω dont les phases sont: $\Phi = n\left(15^\circ + k\frac{\pi}{2}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$; $n = 1, 2, 3, 4, 5$ et les hyperboles correspondantes du plan des z .

4. *Domaines du plan des z dont les images sont des cercles concentriques du centre O dans le plan des w .*

Un cercle du centre O dans le plan des ω a pour équation

$$\omega = Re^{\Phi i} \quad \text{où } R = \text{const. et } 0 \leq \Phi < 2\pi.$$

Elle nous conduit de nouveau aux équations (18). En éliminant le paramètre Φ on a l'équation de la courbe du plan des z , dont l'image est un cercle du plan des ω ,

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = \frac{1}{R^4} - 1. \quad (22)$$

Nous avons là l'équation d'une courbe de Cassini avec

$$c = 1; \quad q = \frac{1}{R} = \frac{c}{R}. \quad (23)$$

C'est un faisceau de courbes confocales de Cassini, dont les foyers F_1 et F_1 sont aux points de ramification ± 1 du plan des z . (Fig. 8.)

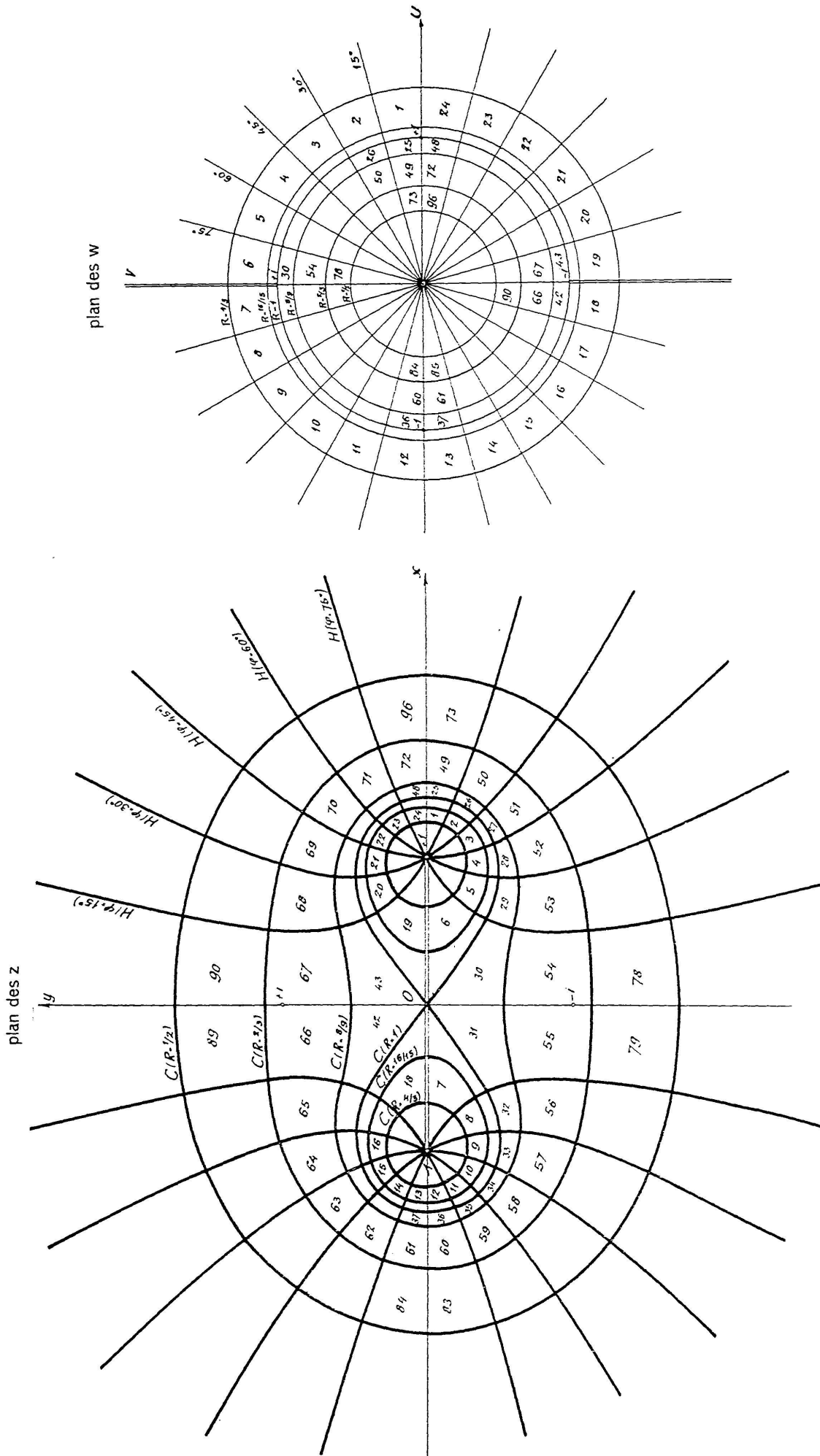
Dans l'intervalle $0 < R \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$, on a $q > \sqrt{2}c$. Pour ces valeurs les courbes de Cassini sont des ovales se rapprochant de la forme elliptique. Les courbes pour $R = \frac{1}{2}$ et $R = 2/3$ sont représentées sur la fig. 8.

Dans l'intervalle $\frac{1}{2}\sqrt{2} < R < 1$, on a $c < q < \sqrt{2}c$. Dans ce cas, les courbes de Cassini sont infléchies dans la direction de l'axe des y , comme nous l'avons indiqué par la courbe C ($R = 8/9$) de la fig. 8.

Le cercle unité du plan des ω , est l'image de la lemniscate

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0.$$

Pour $R > 1$, on a $q < c$. Les courbes de Cassini correspondantes se composent de deux ovales séparées. Nous l'avons



représenté graphiquement par les courbes C ($R = 16/15$) et C ($R = 4/3$) de la figure 8.

Dans le plan des ω , les rayons vecteurs sont perpendiculaires aux cercles concentriques. En vertu de la conformité de la transformation (2), le faisceau d'hyperboles équilatères (19), forme avec le faisceau de courbes confocales de Cassini de l'équation (22), un système de trajectoires orthogonales.

IV. — LES POINTS FIXES DE LA TRANSFORMATION (2).

La transformation (2) peut encore être envisagée d'un autre point de vue. Nous la considérons maintenant comme une transformation de figures dans le même plan. Un point de la position initiale z , occupera dans le même plan, après la transformation, une position z' identique, par rapport au système de coordonnées de ce plan, à celle qu'occuperait son image, par rapport au système de coordonnées dans le plan des ω . Nous nous proposons de déterminer quels sont les points dont la position ne varie pas. Il est nécessaire que l'on ait :

$$z^2 = \frac{1}{z^2 - 1} .$$

L'équation (a) $z^4 - z^2 - 1 = 0$ doit être satisfaite pour tout point fixe. Les quatre racines de (a) sont

$$\begin{aligned} \zeta_1 = + z_1 &= \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}} , & \zeta_3 = + z_2 &= + i \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} , \\ \zeta_2 = - z_1 &= - \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}} , & \zeta_4 = - z_2 &= - i \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} . \end{aligned} \quad (b)$$

Les deux points $z = \zeta_1$, $z = \zeta_2$ sont les points fixes de la transformation (2), car ils sont réels, et d'après ce qui précède, nous savons que le segment de l'axe réel positif, compris entre $+1$ et $+\infty$, a pour image l'axe réel positif tout entier, et que le segment de l'axe réel négatif, compris entre -1 et $-\infty$, a pour image l'axe réel négatif tout entier également.

Les deux points $z = \zeta_3$, $z = \zeta_4$, situés sur l'axe imaginaire,