SUR L'ÉQUATION $x^3 + y^3 = z^3$

Autor(en): **Duarte, F. J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1933)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-25321

quent, ε étant arbitraire, au moins UN de ces trois ensembles a le diamètre $2R$.

Remarque. En réalité nous avons démontré par le raisonnement précédent le théorème plus général suivant:

Soit S *une surface simple de Jordan, sur laquelle on a donné une correspondance biunivoque et continue. Si l'on partage* S *en trois ensembles* E_1, E_2, E_3 *alors au moins* UN *de ces ensembles contient une suite* P_n, P_n' *de paires de points, tels que* P_n *et* P_n' *tendent vers une paire de points conjugués dans la correspondance donnée.*

SUR L'ÉQUATION $x^3 + y^3 = z^3$

PAR

F. J. DUARTE (Genève).

Le but de cette Note est de compléter un travail[1] que nous avons publié récemment: *Sur les solutions irrationnelles et complexes de l'équation* $x^n + y^n = z^n$, dans lequel nous avons donné les formules suivantes pour le cas de $n = 3$:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{2\theta + s + \sqrt{\Delta}}{2}\,, \\ y &= \frac{2\theta + s - \sqrt{\Delta}}{2}\,, \\ z &= \theta + s\,, \end{aligned}\right. \tag{1}$$

où l'on a posé pour abréger $\Delta = s^2 - \dfrac{4\theta^3}{3(2\theta + s)}$.

On donnera aux paramètres θ et s des valeurs rationnelles quelconques; on peut toujours, en multipliant ou divisant les

---

[1] Imprimerie A. Kundig, Genève, 1933.

seconds membres des formules (1) par des entiers convenablement choisis, donner à la solution la forme:

$$\left(\frac{a + b\sqrt{m}}{2}\right)^3 + \left(\frac{a - b\sqrt{m}}{2}\right)^3 = c^3 , \tag{2}$$

a, b, c étant des entiers sans diviseur commun et m un entier non divisible par un carré.

Réciproquement, si l'on donne une solution de l'équation $x^3 + y^3 = z^3$, sous la forme (2), les nombres a, b, c, m étant entiers, cette solution se déduira des formules (1) en donnant aux paramètres les valeurs

$$\theta = a - c , \qquad s = 2c - a .$$

En effet, on aura:

$$\Delta = (2c - a)^2 - \frac{4(a - c)^3}{3a} = \frac{4c^3 - a^3}{3a} .$$

Mais, puisque par hypothèse la relation (2) est vérifiée, on devra avoir:

$$a^3 + 3ab^2m = 4c^3$$

et il en résulte

$$\Delta = b^2m .$$

Les formules (1) donnent donc directement toutes les solutions que M. Rud. FUETER appelle « solutions spéciales » (x est le conjugué de y) dans son Mémoire [1]: *Die Diophantische Gleichung* $\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3 = 0$. M. D. MIRIMANOFF a eu l'obligeance d'attirer mon attention sur cet important Mémoire, après la publication de mon travail cité ci-dessus [2], ainsi que sur la possibilité de solutions d'une forme différente.

On trouve ces solutions en mettant l'équation sous la forme

$$x^3 + y^3 - 1 = 0 \tag{3}$$

[1] *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften.* 25 Abhandlung, 1913.

[2] Ceci explique pourquoi nous n'avons pas mentionné le beau travail de M. FUETER. En se servant de méthodes très ingénieuses, il cherche les conditions pour que l'équation soit résoluble dans un corps quadratique déterminé. Pour le corps imaginaire $k(\sqrt{m})$ ($m \equiv 2$, mod. 3) une condition nécessaire est que le nombre des classes de k soit divisible par 3.

et en faisant la substitution

$$y = tx + 1 \ ,$$

c'est-à-dire, en langage géométrique, en coupant la courbe (3) par une droite passant par le point (0, 1). On obtiendra évidemment le même système de formules en faisant la substitution

$$y = t(x - 1)$$

c'est-à-dire, en coupant la courbe par une droite passant par (1, 0), car cela équivaut à remplacer dans le premier calcul t par $\frac{1}{t}$ et à permuter x, y.

Cette méthode est basée sur la remarque suivante: s'il existe une solution de l'équation (3) de la forme

$$x_1 = \xi_1 + \eta_1 \sqrt{m} \ , \qquad y_1 = \xi_2 + \eta_2 \sqrt{m} \ , \qquad (\eta_1 + \eta_2 \neq 0) \ ,$$

en considérant les valeurs conjuguées on aura une autre solution

$$x_2 = \xi_1 - \eta_1 \sqrt{m} \ , \qquad y_2 = \xi_2 - \eta_2 \sqrt{m}$$

et la sécante passant par les points (x_1, y_1), (x_2, y_2) de la courbe (3) passera nécessairement par (0, 1) ou par (1, 0). En effet, le troisième point de rencontre (x_3, y_3) de la sécante avec la courbe est rationnel et on sait que la courbe (3) n'a d'autres points rationnels que (0, 1), (1, 0).

Nous allons montrer que les coordonnées x_3, y_3 sont effectivement rationnelles. L'équation de la sécante est

$$y = tx + a \ ,$$

en posant pour abréger

$$t = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \ , \qquad a = y_1 - tx_1 \ .$$

Les quantités t, a sont rationnelles et $t \neq -1$, puisque par hypothèse

$$\eta_1 + \eta_2 \neq 0 \ .$$

Si l'on substitue la valeur de y dans l'équation (3), les coefficients de x^3 et de x^2 dans l'équation résultante seront $1 + t^3$ et

$3at^2$, respectivement. D'après une proposition élémentaire de la théorie des équations, la somme des racines de cette équation sera

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{3at^2}{1+t^3} .$$

L'on en déduit que x_3 et $y_3 = tx_3 + a$ sont rationnels.

Puisque on doit avoir $x_3 = 0$, $y_3 = 1$ ou $x_3 = 1$, $y_3 = 0$, il s'ensuit que si

$$\xi_1 + \eta_1 \sqrt{m} , \qquad \xi_2 + \eta_2 \sqrt{m}$$

est une solution de l'équation (3) avec la condition $\eta_1 + \eta_2 \neq 0$, il doit exister une relation entre les quatre quantités ξ_1, ξ_2, η_1, η_2. Il suffit, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer, de considérer seulement le premier cas: $x_3 = 0$, $y_3 = 1$; il en résulte $a = 1$ et par conséquent, la relation annoncée sera:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 - 1 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} = 0 . \tag{4}$$

M. Mirimanoff nous a communiqué aussi d'autres formules fournissant les solutions spéciales; on les obtient en posant $y = a - x$ dans l'équation (3). Elles ne diffèrent des formules (1) que par un changement de notation. On les déduit de ces dernières, en effet, en faisant la substitution

$$2\theta + s = u , \qquad \theta + s = v ,$$

ce qui donne:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{3u^2 + \sqrt{3u(4v^3 - u^3)}}{2} , \\ y &= \frac{3u^2 - \sqrt{3u(4v^3 - u^3)}}{2} , \\ z &= 3uv . \end{aligned} \right. \tag{5}$$

On trouvera toutes les solutions en donnant à u et v des valeurs entières premières entre elles. Si l'on suppose *a priori* que les solutions sont de la forme (2), on peut déduire immédiatement les formules (5) en substituant dans l'équation (2) la valeur de m en fonction de a, b, c tirée de la même équation (2) développée.

Les formules donnant les solutions « non spéciales » de $x^3 + y^3 = z^3$ se déduisent immédiatement des formules (1) mises sous la forme (5). Multiplions, en effet leurs seconds membres par la valeur de y (ou celle de x) et supprimons le facteur commun $3u$ dans les trois résultats. En désignant toujours par z l'indéterminée rationnelle, on aura:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{-3u^2 v + v\sqrt{3u(4v^3 - u^3)}}{2}\,, \\ y &= \frac{u^3 + 2v^3 - u\sqrt{3u(4v^3 - u^3)}}{2}\,, \\ z &= v^3 - u^3\,. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

La condition (4) est, comme on le constate aisément, vérifiée identiquement.

Nous venons de voir que chaque solution spéciale multipliée par un facteur appartenant au même corps, donne une solution non spéciale. Si donc l'on considère comme équivalentes les solutions qui ne diffèrent que par un facteur du corps quadratique correspondant, on peut conclure que l'équation $x^3 + y^3 = z^3$ n'admet que des solutions spéciales. On retrouve ainsi une propriété établie déjà par Burnside et M. Fueter d'une manière différente [1].

Nous terminerons cette Note en donnant une méthode pour déduire d'une solution donnée dans un corps déterminé, une infinité d'autres dans le même corps.

Supposons que l'équation

$$\left(\frac{\xi + \eta\sqrt{m}}{2}\right)^3 + \left(\frac{\xi - \eta\sqrt{m}}{2}\right)^3 = \zeta^3 \tag{7}$$

ait la solution

$$\xi = a\,, \qquad \eta = b\,, \qquad \zeta = c\,,$$

[1] Burnside (W.). On the rational solutions of the equation $X^3 + Y^3 + Z^3 = 0$ in a quadratic field. (*Proceedings of the London mathematical Society*, vol. 14, 1915.)

Fueter (R.). Ueber kubische diophantische Gleichungen (*Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 2, 1930, p. 88).

Nous remercions M. le Prof. Fueter d'avoir bien voulu nous communiquer ces renseignements bibliographiques.

m étant donné. Cette équation peut s'écrire

$$\xi^3 + 3\xi\eta^2 m = 4\zeta^3$$

et il s'agit de déterminer des valeurs entières de ξ, η, ζ la satisfaisant. En divisant par η^3 les deux membres, le problème se réduit à trouver des valeurs rationnelles de ξ, ζ vérifiant l'équation

$$\xi^3 + 3\xi m = 4\zeta^3$$

dans laquelle nous supposerons que m désigne maintenant mb^2, de façon qu'elle soit satisfaite en prenant $\xi = a$, $\zeta = c$.

En appliquant une méthode employée par LEGENDRE pour résoudre une équation analogue (*Théorie des Nombres*, t. II, p. 113), posons

$$\xi = a + \omega \ , \qquad \zeta = c + \rho\omega \ .$$

Faisant la substitution et égalant à zéro le coefficient de la première puissance de ω dans l'équation résultante, on aura:

$$\rho = \frac{a^2 + m}{4c^2} \ , \qquad \omega = -\frac{3(4c\rho^2 - a)}{4\rho^3 - 1} \ ;$$

ρ, ω étant ainsi déterminés, on aura:

$$\xi = a + \omega = \frac{A}{B} \ , \qquad \zeta = c + \rho\omega = \frac{C}{B}$$

et

$$\frac{A^3}{B^3} + 3\frac{A}{B}m = 4\frac{C^3}{B^3} \ ,$$

ou

$$A^3 + 3AB^2 m = 4C^3 \ .$$

L'équation (7) sera donc satisfaite si l'on prend

$$\xi = A \ , \qquad \eta = bB \ , \qquad \zeta = C \ .$$

Exemple I. — On connait la solution

$$\left(\frac{1 + \sqrt{-11}}{2}\right)^3 + \left(\frac{1 - \sqrt{-11}}{2}\right)^3 + 2^3 = 0 \ .$$

On a

$$a = 1 \,, \qquad c = -2 \,, \qquad m = -11 \,.$$

On aura

$$\rho = -\frac{5}{8} \,, \qquad \omega = -\frac{144}{23} \,, \qquad \xi = -\frac{121}{23} \,, \qquad \zeta = \frac{44}{23}$$

et la nouvelle solution sera:

$$\left(\frac{121 + 23\sqrt{-11}}{2}\right)^3 + \left(\frac{121 - 23\sqrt{-11}}{2}\right)^3 + 44^3 = 0 \,.$$

Exemple II. — On a

$$\left(\frac{18 + 17\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \left(\frac{18 - 17\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 21^3 = 0$$

$$a = 18 \,, \qquad c = 21 \,, \qquad m = 2.17^2 = 578 \,.$$

$$\rho = \frac{451}{882} \,, \qquad \omega = \frac{119\,966\,994}{4\,694\,023}$$

et la nouvelle solution sera:

$$\left(\frac{204\,459\,408 + 79\,798\,391\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \left(\frac{204\,459\,408 - 79\,798\,391\sqrt{2}}{2}\right)^3$$
$$= 159\,918\,150^3 \,.$$

Il est facile de montrer qu'on retrouve, en appliquant la méthode que nous venons de donner, le procédé indiqué par Burnside en 1915 dans la Note citée.