

SUR UNE FORMULE PARTICULIÈRE DE QUADRATURE GÉOMÉTRIQUE

Autor(en): **Decouflé, L.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1933)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-25319>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

fait avec a la demi-droite d'origine A contenant B . Prenons de même un point quelconque D sur d et une demi-droite quelconque (située ou non dans le plan donné par d et P), qui fait avec d un angle $\delta \cong \alpha$. Prenons ensuite sur cette demi-droite le point P^* (qui peut ou non coïncider avec P), de manière que :

$$\overline{DP^*} \cong \overline{AB} .$$

En considérant les cas 2 et 3 il est certain que notre théorème (étant vrai pour d et P), est vrai pour d et P^* . On retombe ainsi sur le cas 1 et le théorème de droites parallèles est entièrement démontré.

Juillet 1933.

SUR UNE FORMULE PARTICULIÈRE DE QUADRATURE GÉOMÉTRIQUE

PAR

L. DECOUFLÉ (Alger).

Considérons une courbe S , subissant dans un plan fixe XOY un mouvement de translation représenté par la trajectoire T d'un de ses points C .

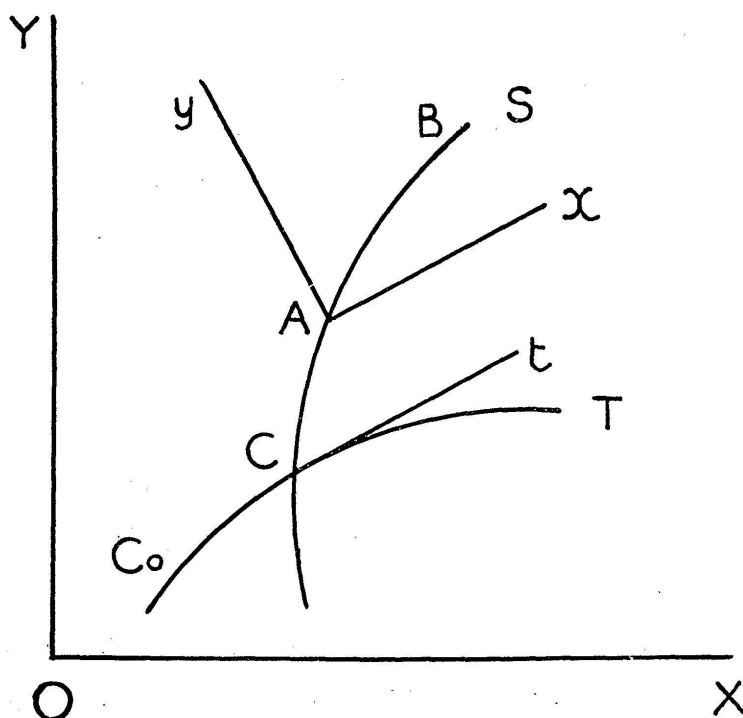


Fig. 1.

L'arc $C_0C = \sigma$ définit sur T , à partir d'une origine arbitraire C_0 la position de C . De même sur S deux points variables A et B sont définis par $CA = s_1$, $CB = s_2$ avec $AB = s = s_2 - s_1$; s_1 , s_2 et par suite s sont des fonctions données de σ .

Rapportons S à deux axes rectangulaires mobiles xAy , tels que Ax soit dirigé à chaque instant suivant la translation instantanée Ct .

L'aire balayée par l'arc AB aura pour expression

$$A = \int y d\sigma = \int y m ds \quad (1)$$

en posant

$$m = \frac{d\sigma}{ds}.$$

Les limites d'intégration correspondant aux valeurs du paramètre définissant les positions extrêmes de la courbe génératrice S .

Proposons-nous de rechercher dans quels cas l'intégrale (1) prend la signification géométrique simple d'un moment d'arc de densité uniforme ou variable.

Il suffira évidemment que dans le mouvement relatif de S par rapport à xAy , cette courbe coïncide à chaque instant avec elle-même. Or il s'agit dans le système (xAy) d'un mouvement à un paramètre, tel que la courbe S passe constamment par l'origine A . Il se compose donc de rotations élémentaires ayant à chaque instant leur centre sur la normale en A à la courbe. Deux cas sont alors à considérer.

a) La rotation élémentaire est constamment nulle. Dans ce cas A est immobile sur S qui est elle-même invariable par rapport à xAy . Si on revient au système fixe XOY par rapport auquel S conserve une direction invariable, on voit que la direction Ox est elle-même invariable par rapport à OX . Il s'agit donc d'une translation rectiligne.

b) La rotation élémentaire n'est pas constamment nulle. Cette rotation doit, pour réaliser la coïncidence, déplacer tan-

gentiellement tous les points de S. Les normales en tous ces points doivent concourir au centre instantané de rotation. La courbe S est obligatoirement un cercle et le mouvement une rotation autour de son centre suivant une loi quelconque.

Dans ce mouvement le rayon aboutissant en A fait un angle constant avec Ox. Si l'on revient au système fixe XOY, on obtient la translation la plus générale d'un cercle, l'origine des arcs étant choisie de manière que le rayon correspondant fasse, à chaque instant, un angle constant avec la direction de la translation.

En résumé, les deux seuls cas où l'intégrale (1) représentera un moment d'arc sont la translation rectiligne d'une courbe quelconque les arcs étant comptés à partir d'un point fixe sur cette courbe, et la translation quelconque d'un cercle, les arcs étant comptés à partir d'une origine telle que le rayon correspondant ait une inclinaison constante sur la direction de translation.

Examinons successivement ces deux hypothèses.

a) *Translation rectiligne d'une courbe.*

$$A = \int_0^s y m ds = \eta \int_0^s m ds = \eta \sigma,$$

η désignant l'ordonnée du centre de gravité de l'arc générateur AB supposé affecté d'une densité linéaire

$$m = \frac{d\sigma}{ds}.$$

Ceci exprime que l'ordonnée moyenne de l'aire du triangle curviligne OAB est égale à l'ordonnée du centre de gravité de l'arc AB de densité variable m .

Il est aisé de vérifier directement ce résultat qu'on peut énoncer également sous la forme suivante:

Etant donné un triangle curviligne à base rectiligne OA, l'ordonnée moyenne de son aire par rapport à cette base est

égale à l'ordonnée du centre de gravité d'un des côtés curvilignes affecté d'une densité linéaire égale au rapport

$\frac{MN}{MP}$ ou $\frac{MN}{NP}$ suivant qu'il s'agit du côté AB ou OB, MN étant une parallèle quelconque à la base, MP, NP, les tangentes en M et N.

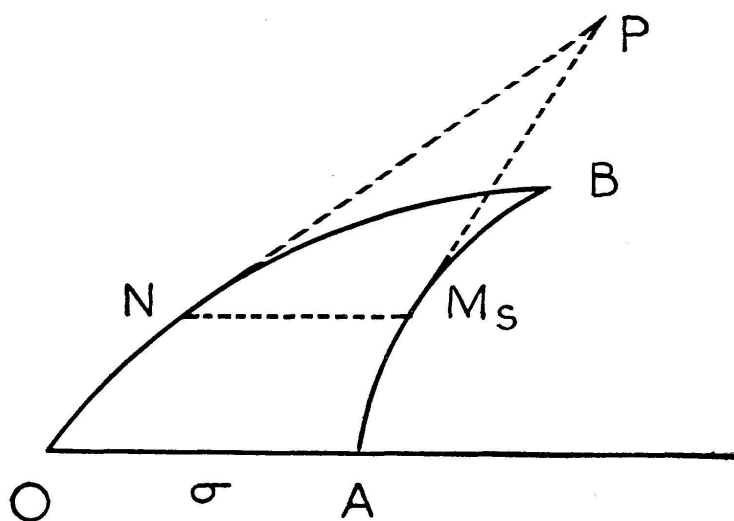


Fig. 2.

Le cas particulier où s et σ sont liés par une relation linéaire et où, par suite, m est constant offre un intérêt spécial pour les quadratures.

L'ordonnée de l'aire du triangle curviligne est alors celle du centre de gravité de l'arc AB, non pondéré. Si, de plus, cet arc a un axe de symétrie parallèle à la translation, cette ordonnée

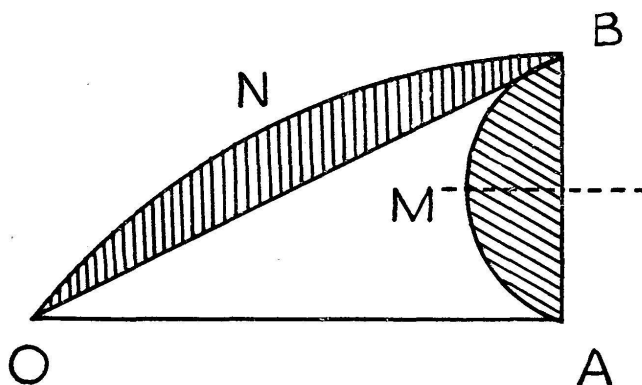


Fig. 3.

est connue et égale à la demi corde AB. On en déduit immédiatement l'équivalence des deux triangles curviligne et rectiligne OAB, ou encore des deux segments hachurés AMB, ONB, propriété qu'on peut énoncer :

I. — *Si un arc de courbe symétrique par rapport à un axe suivant lequel il subit une translation rectiligne est parcouru par un point mobile qui décrit sur lui des arcs proportionnels à la translation, le segment compris entre l'arc ainsi décrit et sa corde a une aire équivalente à celle du segment correspondant de l'arc générateur.*

Considérons enfin une courbe génératrice fermée et faisons les conventions de signe suivantes :

Un sens positif de translation étant choisi, ainsi qu'un sens positif de parcours des arcs sur le contour, on comptera positivement les aires balayées se trouvant dans une translation positive à gauche d'un observateur couché suivant le sens positif du contour, et négativement les aires balayées se trouvant à droite du même observateur, et cela quel que soit le sens du parcours du mobile sur la génératrice. L'aire limitée par la courbe génératrice sera comptée positivement si elle se trouve à droite du sens positif du contour, autrement dit si le sens positif est celui des aiguilles d'une montre, négativement dans le cas contraire.

On vérifie aisément qu'avec ces conventions de signe, on peut écrire la relation générale :

$$A = S + Ly , \quad (2)$$

où A désigne l'aire de la boucle engendrée, S la surface limitée par le contour, L le développement de la base égal au périmètre du contour multiplié par le facteur m , y l'ordonnée du centre de gravité du contour.

La longueur L sera comptée positivement ou négativement suivant que le sens du parcours des arcs est le sens positif ou le sens négatif du contour.

Dans le cas où la courbe génératrice a un axe de symétrie parallèle à la translation, la relation (2) devient :

$$A = S + \frac{Lh}{2} ,$$

L et h désignant la base et la hauteur de la boucle.

II. — Si un contour fermé ayant un axe de symétrie suivant lequel il subit une translation rectiligne est parcouru dans un sens déterminé par un point mobile qui décrit sur lui des arcs proportionnels à la translation, l'aire de la boucle ainsi engendrée est égale à celle du triangle de hauteur maximum inscrit dans la boucle, augmentée ou diminuée, suivant le sens du parcours, de la surface limitée par le contour fermé.

Application. — L'une des relations qui précèdent permet d'effectuer immédiatement, en particulier, les quadratures des cycloïdes ordinaires allongées ou raccourcies, que nous calculons ci-après par une autre formule.

PARTICULARITÉS DES COURBES POUR LESQUELLES $m = \text{Cte}$.

Du mode même de génération découle la construction de la tangente en un point suivant la règle du parallélogramme. Cette tangente est la ligne d'action de la résultante d'un vecteur d'intensité m parallèle à la translation et d'un vecteur unité tangentiel à la courbe génératrice.

Cette propriété étant projective, montre que la courbe engendrée peut être considérée comme la projection oblique d'une hélice tracée sur un cylindre droit dont les sections droites se projetteraient obliquement suivant les courbes génératrices. Pour $m = 1$ les courbes engendrées bissectent les angles formés par les génératrices et les parallèles à la translation.

Remarquons enfin que le tracé de la courbe engendrée peut être

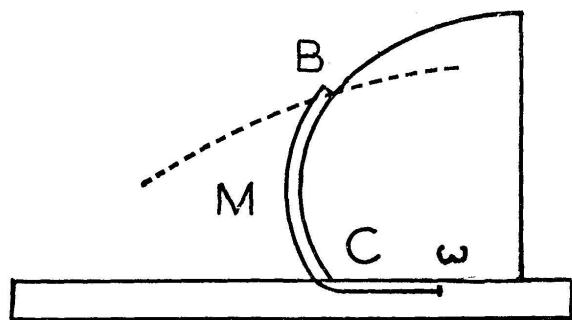


Fig 4.

obtenu mécaniquement d'une manière simple, principalement lorsque $m = 1$.

Le contour de l'arc générateur étant matérialisé par une plaque découpée se déplaçant le long d'une règle suivant la translation voulue, l'extrémité B d'un fil inextensible fixé en

ω à la règle et assujetti à suivre le contour ωCMB décrira la courbe engendrée.

TRANSLATION QUELCONQUE D'UN CERCLE.

On peut reproduire pour ce cas des généralités analogues à celles du cas précédent. On verrait de même qu'on peut choisir arbitrairement la courbe engendrée, le cercle générateur et la courbe de base, lieu de l'origine A, le choix de cette dernière courbe déterminant la courbe de translation d'après la propriété du rayon origine. On obtiendrait ainsi un triangle curviligne pour lequel l'évaluation de l'aire se ramènerait à un moment d'arc du cercle générateur convenablement pondéré.

Particularisons tout de suite le problème en faisant les hypothèses suivantes :

$$m = \text{Cte};$$

L'angle constant du rayon origine avec la translation est droit;

Le cercle générateur est entièrement parcouru;

Les conventions de signes sont celles précédemment adoptées.

L'origine A coïncide alors avec un des points de contact du cercle avec son enveloppe. L'aire de la boucle est

$$2\pi mr \times r + \pi r^2 = (2m + 1)\pi r^2 .$$

On peut par suite énoncer la propriété suivante :

III. — *Si on considère un cercle de rayon constant se déplaçant dans son plan en restant tangent à une courbe de base B et un point mobile parcourant le cercle dans un sens déterminé de façon que les arcs décrits à partir du point de contact soient proportionnels aux arcs décrits par le centre, la courbe engendrée forme une série de boucles qui déterminent avec la courbe de base des aires équivalentes et égales à :*

$$(2m + 1)\pi r^2 ,$$

m désignant le rapport constant entre le déplacement du centre et celui du point sur le cercle.

Application aux épicycloïdes. — La courbe de base est un cercle de rayon R , les déplacements du centre et du point de contact sont dans un rapport constant $\frac{R+r}{R}$.

L'aire d'une boucle est donnée par

$$A = (2m + 1) \pi r^2 ,$$

avec

$$m = 1 \quad \text{pour la cycloïde ordinaire (base rectiligne)}$$

$$m = 1 + \frac{r}{R} \quad \text{pour l'épicycloïde}$$

$$m = 1 - \frac{r}{R} \quad \text{pour l'hypocycloïde}$$

et par

$$A = (2m + 1) \pi a^2$$

avec

$$m = \frac{r}{a} \left(1 + \frac{r}{R} \right)$$

pour l'épicycloïde raccourcie ou allongée, a désignant la distance du point générateur au centre de la roulette.

On voit aisément que, dans les cycloïdes allongées ou raccourcies, à des valeurs égales et de signe contraire de m correspondent les mêmes courbes rapportées à des bases différentes. L'aire des cycloïdes allongées est égale en valeur absolue à la différence des deux aires formées par la boucle.

Pour la cycloïde allongée décrite par un point situé à une distance égale au diamètre ces deux aires sont égales comme on le voit en faisant $m = \frac{-1}{2}$.

Généralisation. — La méthode exposée consiste à intégrer des éléments d'aire $d^2 A = d\sigma dy$ le long de la courbe S puis dans son mouvement de translation. Elle reste applicable au cas où ces éléments sont multipliés par un coefficient fonction de l'ordonnée y . En appelant $f(y)$ cette fonction et $F(y)$ sa primitive on aura :

$$\int \int f(y) d^2 A = \int F(y) m ds . \quad (1)$$

L'expression trouvée dépend en général du système d'axes mobiles xoy . On se bornera donc à la translation rectiligne. Supposons de plus m constant et $f(y)$ d'une forme susceptible d'interprétation géométrique, soit :

$$f(y) = y^\alpha .$$

Pour $\alpha = 0$ le premier membre de (1) représente une aire,

Pour $\alpha = 1$ le premier membre de (1) représente un moment statique,

Pour $\alpha = 2$ le premier membre de (1) représente un moment d'inertie,

les moments étant pris par rapport à ox . En désignant par $\mathcal{M}_\alpha(X)$ le moment d'ordre α par rapport à ox , de l'élément géométrique X , (1) s'écrira

$$\mathcal{M}_\alpha(A) = \frac{m}{\alpha + 1} \mathcal{M}_{\alpha+1}(S) . \quad (2)$$

Le calcul d'un moment de l'aire A se ramène à celui d'un moment d'ordre supérieur de la courbe S . Faisant $\alpha = 0$ dans (2) on a la relation précédemment trouvée :

$$A = mSy = Ly . \quad (3)$$

Faisant le quotient membre à membre de (2) par (3), en prenant, dans (2), $\alpha = 1$

$$y_A = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathcal{M}_2(S)}{Sy} = \frac{\rho^2}{2y} = \frac{1}{2} \left(y + \frac{r^2}{y} \right) \quad (4)$$

y_A désignant l'ordonnée du centre de gravité de l'aire balayée A ;
 ρ le rayon de giration de l'arc générateur par rapport à ox ;
 r le rayon de giration par rapport à la parallèle à ox passant par le centre de gravité de l'arc, d'ordonnée y .

Se plaçant dans les conditions de la propriété (I) on peut compléter cette propriété par la suivante :

(I)'. — *L'ordonnée du centre de gravité de l'aire curviligne balayée est égale à la moitié de celle de l'antipôle de la base rectiligne par rapport à l'ellipse d'inertie de l'arc générateur.*

Application à la cycloïde ordinaire. — En considérant le cercle entier de rayon R :

$$m = 1, \quad A = 2\pi R^2, \quad C = \pi R^2, \quad S = 2\pi R,$$

$$y = R, \quad r^2 = \frac{R^2}{2},$$

$$y_A = \frac{1}{2} \left(R + \frac{R^2}{2R} \right) = \frac{3}{4} R.$$

L'ordonnée du centre de gravité de l'aire totale de la boucle de cycloïde sera donnée par l'équation des moments statiques:

$$2Cy_A + CR = 3Cy$$

d'où =

$$y = \frac{1}{3} \left[2 \times \frac{3}{4} + 1 \right] R = \frac{5}{6} R.$$

SUR LA DIVISION D'UNE SPHÈRE EN TROIS ENSEMBLES

PAR

Julius WOLFF (Utrecht) et Armand DENJOY (Paris).

M. KAROL BORSUK a démontré le théorème suivant:

Si une sphère à n dimensions est partagée en n ensembles de points, alors au moins UN de ces n ensembles a pour diamètre le diamètre de la sphère ¹.

Nous allons donner une démonstration simple pour le cas $n = 3$.

¹ *Internationaler Mathematiker-Kongress, Zürich, 1932. Sektionsvorträge, Band II, page 192.*