MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

A propos d'un catalogue paradoxal.

1. *Lettre de M. Winants.*

C'est avec le plus vif intérêt que j'ai lu le captivant article que M. GONSETH vient de publier sous le titre « La vérité mathématique et la réalité » (*L'Enseignement mathématique*, 31, 1932, pp. 96-114). Se trouvant devant une immense bibliothèque, l'auteur conçoit que l'on peut en classer les livres de différentes manières, dont chacune lui suggérera l'idée de dresser un catalogue. Puis il constate que certains de ces catalogues se mentionnent eux-mêmes, tandis que les autres ne le font pas. C'est alors (p. 103) qu'il s'arroge le droit d'imaginer « le catalogue de tous les catalogues qui ne se mentionnent pas ». Il prétend que la logique ne contient aucune règle qui lui défende de définir ce catalogue paradoxal.

C'est ici que je crois bien qu'il se trompe. D'après le principe du tiers exclu, le catalogue de M. Gonseth doit se mentionner soi-même ou ne pas se mentionner: chacune de ces deux alternatives implique contradiction. L'auteur exagère, me semble-t-il, quand il nous affirme que son catalogue va coopérer à la ruine de la logique classique. La bonne vieille logique, au contraire, nous permet d'affirmer que ce catalogue ne peut pas exister; sa définition renferme une contradiction flagrante.

Suivant qu'on est progressiste ou traditionaliste, on adoptera le point de vue de M. Gonseth ou le mien. Comme ces deux points de vue sont opposés, on pourrait tenter une expérience, on pourrait essayer de réaliser le fameux catalogue. J'ai l'impression que l'expérience donnera raison à la logique traditionnelle.

Liége, le 10 avril 1933. Marcel WINANTS.

2. *Réponse de M. Gonseth à M. Winants.*

La remarque critique de M. WINANTS me paraît renfermer plusieurs malentendus. Je m'en vais tenter de les faire apparaître.

M. Winants semble croire tout d'abord que la bonne vieille logique est une personne qui n'a jamais varié d'opinion. Est-ce vraiment le cas ? Imaginons le dialogue suivant:

La bonne vieille logique: De toute propriété que je reconnais, je dis qu'elle a son contraire et que la propriété et son contraire s'excluent.

L'élève: Reconnaissez-vous la propriété « de mentionner » ? Par exemple, pour un catalogue, de mentionner les Eléments d'Euclide.

La logique: Je n'y vois pas d'inconvénient. On sait ce que mentionner veut dire, et on ne peut à la fois mentionner et ne pas mentionner.

L'élève: Défendez-vous qu'un catalogue se mentionne lui-même ?

La logique: Comment le ferais-je puisque la réalité le permet.

Sur quoi l'élève se met à dresser le catalogue Γ des catalogues C déjà existants qui ne se mentionnent pas eux-mêmes, opération qui ne lui cause aucun embarras. C'est seulement en dernier lieu, son travail terminé, qu'il se pose la question: Le catalogue Γ que voici va-t-il aussi se mentionner lui-même ? Il se rend compte alors qu'il lui est impossible de mentionner *tous* les catalogues C et rien que ceux-là: ou bien Γ sera de trop ou bien il manquera.

(M. Winants propose de tenter l'expérience. Pourquoi ? L'expérience est faite d'avance. Le catalogue Γ n'existe pas, et personne ne prétend le réaliser. Je ne vois pas comment la logique traditionnelle en tirera avantage, puisque c'est justement cette impossibilité de le réaliser qui va causer des embarras.)

L'élève revient se plaindre à la logique: J'ai imaginé un catalogue Γ de tous les catalogues qui ne se mentionnent pas eux-mêmes.

Tous les mots de cette définition, vous avez accepté par avance qu'ils ont un sens déterminé, et que leur emploi est légitime. Mais à mon étonnement, l'objet ainsi défini ne se laisse pas réaliser. Que dois-je en conclure ?

Pendant quelques instants, la logique se trouve dans un cruel embarras, car elle avait cru elle-même que le réel ne viendrait jamais s'inscrire en faux contre les constructions mentales qu'elle avait permises.

(Ce n'est naturellement pas dans cette position que M. Winants voit la logique traditionnelle. Mais personne ne soutiendra que la logique ne l'ait pas prise. C'est l'incompatibilité de cette position avec l'expérience qui fait le fond des apories bien connues et dont le catalogue Γ n'est qu'une forme à peine nouvelle.)

Mais la logique est une personne qui tient à avoir raison en toutes circonstances. Elle voit bientôt qu'elle n'y parviendra que par une volte-face.

La logique: Je vois qu'il faut que je m'explique. Les règles que j'ai formulées sont intangibles. Mais il est vrai que, dans certains cas, il peut être malaisé de découvrir si elles sont applicables. Ainsi, dans notre cas, tu as pu te rendre compte toi-même que l'objet Γ n'y satisfait pas. Note bien ceci: Je ne reconnais comme légitimes que les constructions qui satisfont à mes lois.

(Nous serions arrivés à la position de M. Winants, qui est aussi la position axiomatique habituelle de la Théorie des ensembles.)

L'élève: Je comprends. La définition que j'ai imaginée n'est pas acceptable, parce que l'essai de la réaliser a mis à jour que les règles ne sont pas respectées. En d'autres termes, pour qu'on soit sûr qu'un objet logique qu'on vient d'imaginer soit réalisable, il faut avoir vu que sa définition ne conduit à aucune contradiction.

La logique: C'est cela même.

(M. Winants prétend que maintenant l'élève et tout le monde doivent être satisfaits.)

Après quelque temps, l'élève sent cependant ses doutes renaître.

L'élève: Vos dernières explications ont ébranlé ma confiance. Vous m'avez interdit d'imaginer des objets et de les doter de propriétés telles qu'on en puisse déduire une dérogation aux règles que vous avez posées, par exemple au principe du tiers exclu. Me voici donc au clair: chaque fois qu'une semblable dérogation se produit, je suis en état d'affirmer que cet objet n'existe pas. Mais quelle doit être mon attitude, lorsque je n'ai rencontré aucune contradiction. Les conséquences des définitions sont en nombre indéterminé. Tant que je ne les aurai pas toutes examinées — ce qui est impossible — je ne pourrai pas me défaire du soupçon que l'une d'elles est peut-être contradictoire. La seule certitude que je puisse avoir concerne les objets logiquement inacceptables. Mais je n'oserai jamais affirmer d'un seul objet qu'il est logiquement acceptable. Je n'ose pas invoquer l'évidence, car vous l'avez dit vous-même, elle peut être trompeuse. Vos règles sont intangibles, mais ne vous êtes-vous pas retranché du réel?

(L'impossibilité de réaliser le catalogue Γ pose donc le dilemme suivant:

ou bien la logique doit savoir par avance quelles sont les notions et les objets logiques qu'elle reconnaît comme légitimes, et dans ce cas, la considération du catalogue Γ parle contre elle, car elle n'en a reconnu l'impossibilité qu'après coup;

ou bien elle en est réduite à porter ses jugements après coup, et dans ce cas elle est aussi réduite à l'impuissance.

Il faut voir les deux parties du dilemme. M. Winants n'échappe à la première que pour tomber dans la seconde.

D'ailleurs, ce n'est pas vouloir la ruine de la logique classique que d'en rechercher le domaine «naturel d'extension» et de chercher à en abstraire les caractères d'une « logique des liaisons » ou d'une « logique des objets en devenir », dans laquelle il soit possible d'éviter *a priori* les apories et les antinonies bien connues.

Qu'il me soit encore permis, sous la forme commode du dialogue, d'esquisser mon point de vue.

La logique reconnaît qu'en voulant tout sauver de son prestige, elle s'est mise dans une position incommode. Elle fait la part du feu.

La logique: Je vois que tu ne renieras pas mon autorité si je t'en dis les limites. Mes lois ne touchent pas directement le réel. Les objets que tu te représentes ne sont pas non plus absolument adéquats au réel; ils n'y correspondent que d'une façon sommaire et schématique. Appelle « objets aristotéliciens » les objets que tu te représentes comme dotés de propriétés *a priori*, selon lesquelles tu les classes et tu les juges. Mes lois sont ce que tu pourrais appeler « les lois naturelles » de ce monde schématisé des objets aristotéliciens.

L'élève: Je me sens à la fois déçu et tranquillisé. Mais n'existe-t-il pas, je veux dire n'avons-nous pas l'idée d'objets qui ne puissent être dits aristotéliciens ? Et votre juridiction ne les atteint-elles pas ?

La logique: Je te dirai une autre fois comment je puis me transformer en une logique des objets en devenir, et sans détermination préalable. Quand tu l'auras conçue, tu verras disparaître les difficultés qui t'ont arrêté [1].

Zurich, 15 mai 1933. F. GONSETH.

Sur la logique intuitionniste.

Réponse à MM. Barzin et Errera.

Je suis parfaitement disposé à m'expliquer plus en détail sur la contradiction que vous croyez avoir trouvée dans la logique intuitionniste, d'autant plus que vos dernières explications (voir ce journal, XXXI, p. 122) mettent clairement en lumière le point où, à mes yeux, votre raisonnement est en défaut.

Dans mon travail sur la logique formelle (*S.-B. preuss. Akad. Wiss.* 1930, p. 42) je n'emploie qu'une seule négation qui signifie l'*impossible*. Il s'en suit que dans tous les énoncés qu'on peut tirer de ce travail la négation doit avoir cette signification. Ainsi, votre interprétation du théorème: « Il est impossible qu'il existe une proposition qui ne soit *ni* vraie *ni* fausse » est incorrecte, *ni* devant être interprété dans le sens de l'*impossibilité*. D'autre part, comme vous le remarquez, dans l'énoncé: « le principe du tiers exclu n'est

[1] F. GONSETH. Sur l'axiomatique de la théorie des ensembles, et sur la logique des relations. *Commentarii math, helv.*, vol. 5, 1933, p. 108-136.

pas vrai » *ne pas* ne désigne pas l'impossibilité mais une autre notion plus faible; en conséquence cet énoncé ne figure pas dans le travail que je viens de citer. Par l'interprétation donnée tantôt, qui était contenue entièrement dans mes travaux antérieurs, la contradiction disparaît. Je dois refuser toute responsabilité des conséquences d'une interprétation que je n'ai jamais ni formulée ni sous-entendue.

Permettez-moi de dire encore quelques mots sur la deuxième signification de *ne pas* que vous n'avez illustrée que par un exemple non-mathématique. On ne peut dire que le principe du tiers exclu « n'est pas vrai » que si l'on fait coincider le sens du mot *vrai* avec celui de *démontré*, interprétation qui s'impose à l'intuitionniste, mais qui n'est pas indispensable pour comprendre ses idées. Qui ne l'accepte pas, dira: « On ne sait pas si le principe du tiers exclu est vrai ». Or, cette phrase n'exprime aucun théorème ni de mathématiques ni de logique; elle n'est qu'un avertissement que l'énoncé « le principe du tiers exclu est vrai » ne doit pas être fait à l'état actuel de la science. Il est évident qu'un tel avertissement ne peut pas conduire à une contradiction. Formellement, la logique intuitionniste ne diffère de la logique classique que par le biffage d'un axiome, opération qui ne saurait engendrer de contradiction; les explications en dehors du système formel ne servent qu'à justifier des avertissements comme celui que nous venons de considérer. On peut donc écarter d'avance la possibilité d'une contradiction dans la logique intuitionniste; toute discussion sur ce sujet serait inutile et même nuisible si elle ne pouvait servir à éclaircir les fondements de la mathématique nouvelle de M. Brouwer.

Je dois me défendre d'avoir attaqué la position des formalistes; dans ma note précédente, en parlant des « partisans de la logique classique » je n'ai pas eu en vue les formalistes conséquents, qui eux-mêmes n'accepteraient ce titre qu'avec quelque réserve. Je ne suis pas certain que nous entendons la même chose par ce terme de « formalistes ». Pour moi est formaliste celui pour qui les formules mathématiques sont des suites de signes parfaitement dépourvues de sens; c'est seulement sous cette condition que le choix des axiomes est entièrement libre. J'appelle partisans de la logique classique ceux qui soutiennent que les démonstrations mathématiques expriment des pensées qui, pour être cohérentes, sont soumises aux règles de la logique classique. De ce point de vue je ne vois pas comment les axiomes peuvent être arbitraires. Si une proposition a une signification, on peut demander si elle est vraie ou non et on n'est pas libre de fixer arbitrairement la réponse. Des deux choses l'une: ou bien les mathématiques consistent de pensées humaines, ou bien elles sont purement formelles. Le but de M. Brouwer est de tirer toutes les conséquences de la première alternative

Enschede (Hollande) 11 février 1933. A. HEYTING.

Réponse à M. A. Heyting.

Dans sa réplique, M. Heyting prétend n'employer que la négation forte, celle qui marque l'impossible, le contradictoire et éviter soigneusement la négation faible, plus générale que l'autre et qui signifie l'exclusion hors d'une classe ou l'inapplicabilité d'un prédicat.

Or, l'expression « une proposition *ni vraie ni fausse* », en abrégé: *tierce*, prendra des sens différents, selon que les mots *ni* sont des négations fortes ou faibles.

Dans son théorème qu'on pouvait lire: « *il est faux que le principe du tiers exclu soit faux* », il ne visait donc que le tiers étroit correspondant à la négation forte; et l'exemple que nous avons indiqué d'une proposition tierce au sens large, n'apparaît plus comme une preuve que, dans le système intuitionniste, le principe du tiers exclu soit faux. Le sophisme relevé par nous s'évanouit donc. Mais à quel prix ?

Pour pouvoir faire cette distinction entre les deux sortes de négations, M. Heyting est amené à *identifier* le vrai avec le démontré vrai et le faux avec le démontré faux; le tiers, ce qui n'est pas démontré vrai ni dém ntré faux, c'est alors l'incertain.

Nous pensons d'ailleurs qu'il se fait illusion, lorsqu'il croit n'employer que la négation forte. En réalité, refuser pour ses démonstrations un principe quelconque, en délimitant ceux qu'il accepte, c'est précisément employer la négation faible de ce principe, par son *exclusion de la classe* des prémisses avouées. La seconde espèce de négation est donc implicitement mais nécessairement présente dans ses postulats.

On pourrait relever aussi ce que M. Heyting lui-même dit du principe du tiers exclu, incertain parce qu'indémontré; mais « ...cette phrase n'exprime aucun théorème ni de mathématiques ni de logique; elle n'est qu'un avertissement que l'énoncé « le principe du tiers exclu est vrai » ne doit pas être fait dans l'état actuel de la science ». Ainsi, les innombrables et beaux travaux, où l'on tire des conclusions de l'hypothèse célèbre, mais incertaine, de Riemann sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$, ce ne sont pas des propositions mathématiques, c'est-à-dire hypothétiques, mais de purs avertissements.

Incidemment, nous pensons que la démonstration des postulats ne se posait pour personne. Sollicités aujourd'hui de démontrer le principe du tiers exclu avant de l'employer, serons-nous demain sommés de prouver aussi le principe de contradiction ?

On est donc arrivé à ceci, que les intuitionnistes appellent vrai ce que les formalistes appellent démontré; et cette démarche n'est censée être qu'une modification du langage. L'inconvénient de celui qu'on nous propose, nous l'avons souligné ailleurs: il introduit l'accidentel et le subjectif dans la Science, une proposition *devenant* vraie, le jour où quelqu'un la démontre, et cessant de l'être, s'il perd sa démonstration !

M. Brouwer n'avait-il pour but qu'une pure transformation verbale, d'ailleurs malheureuse selon nous, quand il *interdisait* à tous l'emploi du principe du tiers exclu, non parce qu'indémontré, mais parce qu'inacceptable, et parce que les propositions qu'on en déduit sont « onjuist » [1] ? D'où il tirait la nécessité de refaire toute la mathématique pour chasser les derniers vestiges d'un aussi mauvais principe et de créer ces *théorèmes intuitionnistes*, auxquels s'applique, depuis tantôt vingt ans, toute son Ecole ? Que conclut aujourd'hui son disciple, M. Heyting ? « De deux choses l'une: ou bien les mathématiques consistent en pensées humaines, ou bien elles sont purement formelles. Le but de M. Brouwer est de tirer toutes les conséquences de la première alternative. » Combien maigre est cet aboutissement de ce qui devait être une grande révolution ! Nous attendions de solides raisons pour changer toute notre manière de penser; on nous propose arbitrairement la modification gratuite du sens de deux mots.

Libre aux intuitionnistes de faire ces changements de langage et, par conséquent, avec moins de prémisses, de trouver moins de théorèmes; d'ailleurs, ils reconnaissent eux-mêmes que c'est un appauvrissement de la science. Libre à nous de ne pas les suivre.

Bruxelles, 18 mai 1933. M. Barzin et A. Errera.

Réponse à MM. Barzin et Errera.

Ayant atteint l'accord sur le point essentiel, nous pourrions terminer la discussion. Permettez-moi seulement quelques mots sur les questions de *valeur*, que j'ai évité jusqu'ici pour ne pas troubler les points matériels qui étaient en débat.

Vraiment, la question de savoir si l'on cultivera les mathématiques pures comme un jeu avec des signes sur le papier, sans aucune signification, ou comme une science créée par l'esprit humain et nous révélant les lois de son activité, ne se réduit pas à une simple question de langage. Comme je l'ai déjà dit, l'identification du vrai avec le démontré n'est pas indispensable pour comprendre les idées de M. Brouwer. La révolution n'est pas arrêtée par ce fait qu'on ne peut défendre aux formalistes de mettre leurs signes sur le papier. Il est essentiel que leurs suites de signes, si l'on cherche à les interpréter, donnent des raisonnements qui sont « onjuist » (erronés); par suite, ils n'ont aucun droit de proclamer leurs résultats comme « vrais ». Pour qui se décide au formalisme conséquent, la révolution n'est pas moins grande: il doit renoncer à toute interprétation de ses énoncés

[1] L.-E.-J. Brouwer, Over de rol van het principium tertii exclusi in de Wiskunde, in het bijzonder in de functie-theorie. *Wis. en Natuurkundig Tijdschrift,* II (1-2), Ad. Hoste, Gand, 1923.

et les considérer comme des suites de figures dépourvues de sens. Qui, avant M. Hilbert, songeait à considérer les mathématiques comme un jeu arbitraire ?

D'autre part, la nécessité de sacrifier plusieurs énoncés classiques n'entraîne pas forcément un appauvrissement de la science. La subtilité des nuances logiques engendre des distinctions mathématiques et des finesses de démonstration d'un charme incomparable. Même celui qui cherche la beauté dans le nombre des théorèmes sera content, car par ces distinctions nouvelles beaucoup de théorèmes se divisent en plusieurs cas différents. Qui veut se convaincre de la beauté caractéristique des mathématiques intuitionnistes, qu'il étudie un des chapitres qui en sont déjà développés ou, mieux encore, qu'il se résolve à refaire de façon intuitionniste quelque théorie classique non trop compliquée. Il ne se repentira pas de sa peine.

Enschede (Hollande), 19 juin 1933. A. HEYTING.

Le champ terrestre de la gravitation au point de vue relativiste.

Les expériences optiques exécutées par Dayton C. MILLER à l'Observatoire de Mont-Wilson en Californie, dont il communiqua lui-même les résultats au Congrès de l'American Association for the Advancement of Science [voir *Proceedings of the National Academy of Sciences* (Washington), juin 1925], constituèrent, ainsi qu'il est bien connu, une grande surprise à l'égard de la preuve relativiste offerte par la célèbre expérience de Michelson. Les dernières expériences du regretté Prof. Michelson confirmèrent les résultats obtenus, il y a un demi-siècle, par lui-même en collaboration avec Morley [1].

Il est maintenant légitime de se demander si un effet, à considérer comme appartenant au type Miller (sous réserve d'être confirmé par de moyens spéciaux d'expérimentation), pourrait se présenter au moins dans certaines régions de l'espace-temps terrestre.

La formelle circonstance banale (bien connue), qui découle immédiatement du principe des géodésiques de longueur nulle de l'espace-temps, selon laquelle un espace-temps einsteinien de type générique conduit à des anisotropies à l'égard du comportement de la vitesse de la lumière, ne nous permettait pas de connaître la possibilité

---

[1] Dans une Note récente (*Comptes rendus*, 7 nov. 1932, p. 769), intitulée : « C'est l'effet Esclangon (*Journal des Observateurs*, 15 avril 1928, p. 49), qui fut observé par M. Miller », M. E. CARVALLO termine en disant : « Un doute est peut-être encore permis sur ces déviations en raison de leur petitesse. Aussi doit-on souhaiter que les nouvelles mesures poursuivies par les deux savants conduisent à des résultats d'une précision suffisante pour assurer à la science la conquête définitive de la vérité ».

d'avoir des anisotropies lumineuses compatibles avec les lois ordinaires de la dynamique du point pesant [1].

Récemment j'ai établi l'existence théorique d'anisotropies de ce dernier type (voir *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1930, tome LIV), en donnant en même temps un schéma du champ terrestre de la gravitation au point de vue relativiste einsteinien.

Université de Cagliari (Italie), mai 1933. U. CRUDELI.

CHRONIQUE

Union Internationale Mathématique.

Troisième Assemblée Générale tenue à Zurich le 11 septembre 1932.

L'Union internationale Mathématique a tenu sa troisième assemblée générale le dimanche 11 septembre 1932 à l'occasion du Congrès international des Mathématiciens réuni à Zurich.

La séance fut ouverte à dix heures par le président de l'Union, M. W. H. YOUNG, assisté au bureau par M. DE LA VALLÉE POUSSIN, président d'honneur, M. H. FEHR, vice-président et M. VALIRON, secrétaire provisoire.

Etaient représentés les 17 *pays adhérents* suivants: Belgique, Canada, Espagne, Egypte, France, Grande Bretagne, Grèce, Hollande, Hongrie, Italie, Japon, Norvège, Pologne, Suisse, Tchécoslovaquie, Etats-Unis d'Amérique, Yougoslavie.

Assistaient à la séance, avec voix consultative, des représentants de *pays non adhérents:* Allemagne, Danemark, Roumanie et le représentant de l'Institut de Coopération intellectuelle de Paris.

Le président donna d'abord la parole à M. de la Vallée Poussin qui expliqua dans quelles circonstances, conformément aux statuts, M. Young avait été désigné comme président. M. Young prononça alors une courte allocution, puis donna la parole au secrétaire.

Le secrétaire signala les modifications survenues dans la liste des *pays adhérents*. En 1928, au moment du Congrès de Bologne, les pays suivants adhéraient à l'Union: Afrique du Sud, Australie, Belgique, Canada, Danemark, Espagne, France, Grande-Bretagne, Hollande, Tchécoslovaquie, Etats-Unis d'Amérique, Yougoslavie. Le

[1] Voir à cet égard, l'article de mise au point, par G. WATAGHIN, dans *Scientia*, août 1927.