

## II.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1932)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

relations (4); nous les savons incompatibles,  $a'$  différant de  $a$ . Mais si

$$\int_0^l y dx - x dy = \int_0^l (y' dx' - x' dy') ,$$

c'est-à-dire si les projections de (C) et de (C') sur  $xOy$  enferment des surfaces équivalentes, les conditions précédentes font place aux égalités (5), vérifiées pour

$$a \cdot a' = 1 .$$

Ainsi:

*Si deux points M et M' décrivent simultanément deux courbes fermées de même longueur et dont les projections sur un plan bordent des surfaces équivalentes, les courbes décrites par les points  $\mu$  et  $\mu'$  de la droite MM', contraposés pour le milieu du segment MM', jouissent des mêmes propriétés.*

La proposition s'applique particulièrement au cas de la correspondance par arcs équivalents sur des courbes fermées de même longueur; les lieux de  $\mu$  et de  $\mu'$  ont, en outre, même longueur.

## II.

8. — Plaçons-nous maintenant dans le domaine de la géométrie

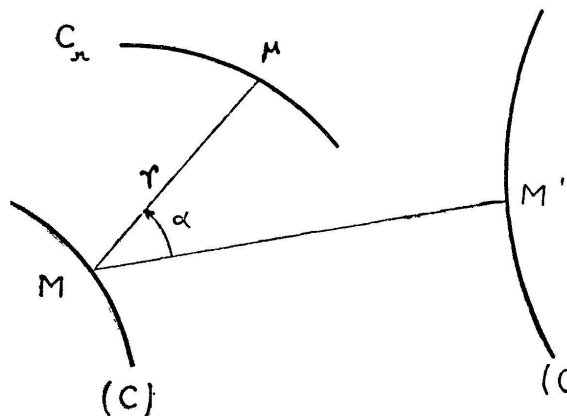


Fig 1

plane et soit le point  $\mu$  transformé du point  $M'$  par l'homothétie-rotation de centre M et de rapport complexe  $r_\alpha$  (fig. 1); l'égalité vectorielle

$$\vec{M\mu} = r_\alpha \cdot \vec{MM'}$$

(C') s'écrit encore

$$\vec{O\mu} = \vec{OM} + r_\alpha (\vec{OM'} - \vec{OM})$$

et, par suite,

$$\xi + i\eta = (x + iy) + (r \cos \alpha + ir \sin \alpha) [(x' - x) + i(y' - y)]:$$

finalemeut, les coordonnées de  $\mu$  sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = x + r[(x' - x) \cos \alpha - (y' - y) \sin \alpha] , \\ \eta = y + r[(x' - x) \sin \alpha + (y' - y) \cos \alpha] . \end{array} \right.$$

Par suite

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{dx}{du} + r \left( -\frac{dx}{du} \cos \alpha + \frac{dy}{du} \sin \alpha \right) ,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = r \left( \frac{dx'}{dv} \cos \alpha - \frac{dy'}{dv} \sin \alpha \right) ,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial u} = \frac{dy}{du} + r \left( -\frac{dx}{du} \sin \alpha - \frac{dy}{du} \cos \alpha \right) ,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial v} = r \left( \frac{dx'}{dv} \sin \alpha + \frac{dy'}{dv} \cos \alpha \right) ,$$

et les coefficients, pour cette surface plane que décrit le point  $\mu$ , sont

$$A = 0 ,$$

$$B = 0 ,$$

$$C du dv = r \sin \alpha (dx dx' + dy dy') + r (\cos \alpha - r) (dx dy' - dy dx') ,$$

$$E du^2 = (r^2 - 2r \cos \alpha + 1) (dx^2 + dy^2) ,$$

$$F du \cdot dv = r (\cos \alpha - r) (dx dx' + dy dy') - r \sin \alpha (dx dy' - dy dx') ,$$

$$G dv^2 = r^2 (dx'^2 + dy'^2) .$$

9. — *Correspondance par surfaces équivalentes.* — La surface élémentaire décrite par  $\mu$  sur le plan a pour aire

$$d\sigma_\mu = |C du dv|$$

ou bien

$$d\sigma_\mu = |r \sin \alpha (dx dx' + dy dy') + r (\cos \alpha - r) (dx dy' - dy dx')| .$$

Cette aire est la même pour les points  $\mu$  et  $\mu'$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} r \sin \alpha = \pm r' \sin \alpha' , \\ r (\cos \alpha - r) = \pm r' (\cos \alpha' - r') , \end{array} \right.$$

ou que

$$\frac{r}{\sin \alpha'} = \frac{r'}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin (\alpha + \alpha')} ;$$

il est immédiat de constater que les points  $\mu$  et  $\mu'$  ainsi définis sont contraposés pour la médiatrice du segment  $MM'$ .

10. — *Correspondance par arcs équivalents.* — L'expression de l'arc élémentaire décrit par  $\mu$  sur le plan est telle que

$$ds_{\mu}^2 = \begin{cases} (r^2 - 2r \cos \alpha + 1)(dx^2 + dy^2) \\ + 2[r(\cos \alpha - r)(dx dx' + dy dy') - r \sin \alpha(dx dy' - dy dx')] \\ + r^2(dx'^2 + dy'^2) . \end{cases}$$

La correspondance précédente ne se poursuit pas en général, car les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} r^2 - 2r \cos \alpha + 1 = r'^2 - 2r' \cos \alpha' + 1 , \\ r(\cos \alpha - r) = r'(\cos \alpha' - r') , \\ r \sin \alpha = r' \sin \alpha' , \\ r^2 = r'^2 , \end{array} \right. \quad (6)$$

qui se réduisent d'ailleurs aux trois dernières, n'admettent que la seule solution

$$r = r' , \quad \alpha = \alpha' + 2k\pi .$$

Mais si les arcs simultanément décrits par  $M$  et  $M'$  ont même longueur,

$$dx^2 + dy^2 = dx'^2 + dy'^2$$

et les égalités

$$\left\{ \begin{array}{l} r(\cos \alpha - r) = r'(\cos \alpha' - r') , \\ r \sin \alpha = r' \sin \alpha' , \end{array} \right. \quad (7)$$

sont satisfaites dans les conditions du paragraphe 9.

Une autre correspondance par arcs équivalents s'obtient encore en supposant parallèles les tangentes en  $M$  et  $M'$ ; ceci entraîne

$$dx dy' - dy dx' = 0$$

et supprime la troisième relation (6), donnant un système de solution

$$r = r' , \quad \alpha = -\alpha' + 2k\pi :$$

les  $\mu$  et  $\mu'$  sont contraposés pour la droite  $MM'$ .

11. — *Conclusion.* — En résumé:

*Si deux points M et M' décrivent deux courbes quelconques données d'un plan, il s'établit entre les points  $\mu$  et  $\mu'$ , contraposés pour la médiatrice du segment MM', une correspondance conservant l'aire; si, de plus, les arcs simultanément décrits par M et M' ont même mesure, de même ceux que décrivent  $\mu$  et  $\mu'$ .*

12. — En supposant les courbes (C) et (C') fermées, de même longueur et simultanément décrites par les points M et M', la courbe qu'engendre  $\mu$  se ferme et l'aire incluse a pour expression

$$\int_0^l \eta d\xi - \xi d\eta ,$$

l'élément différentiel étant une fonction de l'arc de (C), par exemple. Un calcul long mais fort simple transforme l'intégrale définie en

$$\begin{aligned} & (r^2 - 2r \cos \alpha + 1) \int_0^l (y dx - x dy) \\ & + r (\cos \alpha - r) \int_0^l (y dx' - x dy' + y' dx - x' dy) \\ & - r \sin \alpha \int_0^l (y dy' - y' dy + x dx' - x' dx) \\ & + r^2 \int_0^l (y' dx' - x' dy') . \end{aligned}$$

L'aire est la même pour les points  $\mu$  et  $\mu'$  répondant précisément aux relations (5); de là une conclusion analogue à celle du paragraphe 10. Si

$$\int_0^l y dx - x dy = \int_0^l (y' dx' - x' dy') .$$

c'est-à-dire si les aires qu'enferment (C) et (C') sont égales, (6) est remplacé par (7): les points  $\mu$  et  $\mu'$  sont contraposés pour la médiatrice du segment MM'.

Ainsi:

*Si deux points M et M' décrivent simultanément deux courbes fermées d'un plan, de même longueur et bordant des surfaces équivalentes, les courbes décrites par les points  $\mu$  et  $\mu'$ , contraposés pour la médiatrice du segment MM', sont fermées et bordent des surfaces équivalentes.*

La proposition s'applique particulièrement au cas de la correspondance par arcs équivalents sur des courbes fermées de même longueur; les lieux de  $\mu$  et de  $\mu'$  ont, en outre, même longueur.

Juillet 1932.

## SUR LA SOMMATION DES SÉRIES DIVERGENTES PAR LES MOYENNES GÉNÉRALISÉES

PAR

Nikola OBRECHKOFF (Sofia, Bulgarie).

Soit  $c_0, c_1, c_2, \dots$ , des nombres donnés et supposons que les nombres

$$C_n = \sum_{\mu=0}^n c_\mu$$

sont différents de zéro. La série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{1}$$

est sommable par les moyennes généralisées si l'expression

$$\delta_n = \frac{c_0 s_0 + c_1 s_1 + \dots + c_n s_n}{C_n}, \quad s_n = \sum_{\mu=0}^n a_\mu,$$