

### 3. — Volumes a parois conoïdales.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1931)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.04.2024**

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

#### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

De là une association possible de méridiennes fort différentes; nous n'insisterons pas sur la détermination de ces méridiennes associées.

### 3. — VOLUMES A PAROIS CONOÏDALES.

§ 15. — *Expression générale.* — Substituons enfin au cylindre un conoïde droit et calculons  $\Sigma V_i$ .

Soient, l'axe conoïdal étant confondu avec  $z'z$ ,  $\mu$ ,  $M_i$ ,  $m$  les points de  $z'z$ , de  $\Sigma_i$  et de  $\sigma$  sur une même parallèle au plan  $xOy$

$$\rho_i = \frac{\overline{\mu M_i}}{\mu m} ,$$

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  les cosinus directeurs de la normale en  $m$  à  $(s)$ .

Il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma V_i = \int_{\sigma} \int \frac{1}{2} (\Sigma \rho_i^2) (\alpha x + \beta y) d\sigma , \\ \text{avec} \\ F(\rho_i x, \rho_i y, z) = 0 . \end{array} \right.$$

Si l'on ordonne d'ailleurs  $F$  par rapport aux puissances décroissantes de  $XY$ ,

$$F \equiv \Lambda_q(X, Y, Z) + \Lambda_{q-1} + \dots$$

$\Lambda_i$  étant homogène et de degré  $i$  en  $XY$ , il vient

$$\Sigma V_i = \frac{1}{2} \int_{\sigma} \int \left( \frac{\Lambda_{q-1}^2}{\Lambda_q^2} - 2 \frac{\Lambda_{q-2}}{\Lambda_q} \right) (\alpha x + \beta y) d\sigma \quad (5)$$

§ 16. — Posons

$$\Lambda = \frac{\Lambda_{q-1}^2}{\Lambda_q^2} - 2 \frac{\Lambda_{q-2}}{\Lambda_q} ;$$

appliquons à l'intégrale double la formule de Stokes

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\sigma} \int \Lambda(x, y) d\sigma = \int_c P dx + Q dy \\ \text{avec} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \Lambda y \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = -\Lambda x \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} . \end{array} \right.$$

Introduisant la fonction  $K$ , homogène et de degré  $-2$  par rapport à  $xy$ , telle que

$$\Lambda = \frac{\partial K}{\partial z} ,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} P &\equiv y[K + \Omega(x, y)] \\ Q &\equiv -x[K + \Omega(x, y)] \end{aligned}$$

$\Omega$  étant une fonction arbitraire, homogène et de degré  $-2$ ; dès lors

$$\Sigma V_i = \frac{1}{2} \int [K + \Omega] (y dx - x dy)$$

Si donc  $\sigma$  appartient à une surface  $(s_1)$  d'équation

$$\begin{aligned} K(x, y, z) + \Omega(x, y) &= h , \\ \Sigma V_i &= h \sigma_2 ; \end{aligned}$$

la somme des volumes équivaut au volume cylindrique de hauteur  $h$  et dont la base est la projection de  $\sigma$  sur  $xOy$ .

Lorsqu'en particulier (S) est un cylindre à génératrices parallèles à  $z'z$ ,

$$K = \Lambda z$$

et les surfaces  $(s_1)$  ont pour équation

$$\Lambda z + \Omega = h ,$$

car  $\Lambda$  ne renferme pas la variable  $z$ .

*A toute surface algébrique (S) peut être attachée une famille de surfaces  $(s_1)$  telles qu'un contour  $\sigma$  y tracé donne un conoïde pour lequel la somme des volumes limités aux différentes cloisons*

$\Sigma_i$  qu'il découpe sur (S) soit équivalente au volume d'un cylindre droit de hauteur constante ayant pour base la projection de  $\sigma$  sur le plan directeur du conoïde.

Ces surfaces ne dépendent que des trois premiers termes de l'équation de (S), ordonnée suivant les puissances décroissantes de XY :

$$\Lambda_q(X, Y, Z) + \Lambda_{q-1}(X, Y, Z) + \dots + \Lambda_0 = 0 .$$

§ 17. — Surfaces ( $s_1$ ) attachées au cylindre circulaire

$$(X - a)^2 + Y^2 - R^2 = 0 .$$

Dans le cas actuel

$$\Lambda_q \equiv x^2 + y^2 , \quad \Lambda_{q-1} \equiv -2ax , \quad \Lambda_{q-2} \equiv a^2 - R^2 ,$$

et

$$\Lambda \equiv \frac{4a^2x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{a^2 - R^2}{x^2 + y^2} ;$$

l'équation générale de ( $s_1$ ) s'écrit, tous calculs faits,

$$(x^2 + y^2)^2 - \frac{2z}{h} [(R^2 + a^2)x^2 + (R^2 - a^2)y^2] + \Theta(x, y) = 0 ,$$

$\Theta$  étant homogène et de degré + 2.

En supposant nulle cette dernière fonction, s'obtient la surface ( $s'_1$ ) particulière

$$(x^2 + y^2)^2 - \frac{2z}{h} [(R^2 + a^2)x^2 + (R^2 - a^2)y^2] = 0 ,$$

ou, en coordonnées cylindriques

$$z = \frac{h}{2} \frac{r^2}{a^2 \cos 2\theta - R^2} .$$

Or, la quartique bicirculaire

$$(x^2 + y^2)^2 - (Ax^2 + By^2) = 0$$

est la podaire centrale de la conique

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - 1 = 0 :$$

( $s'_1$ ) est donc le lieu des podaires centrales des coniques

$$\frac{x^2}{2 \frac{z}{h} (R^2 + a^2)} + \frac{y^2}{2 \frac{z}{h} (R^2 - a^2)} - 1 = 0$$

sections du paraboloid

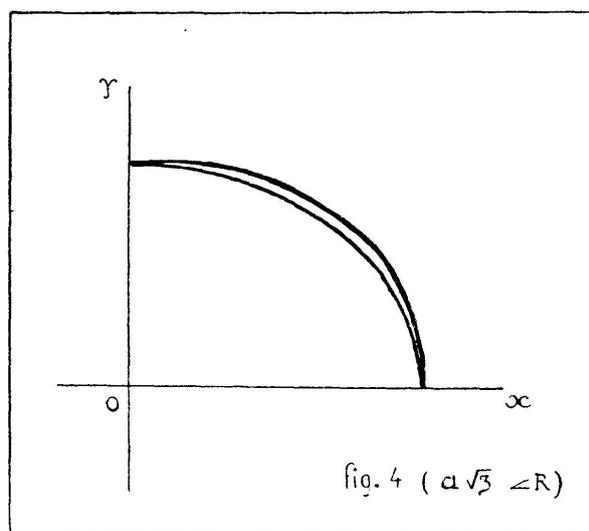
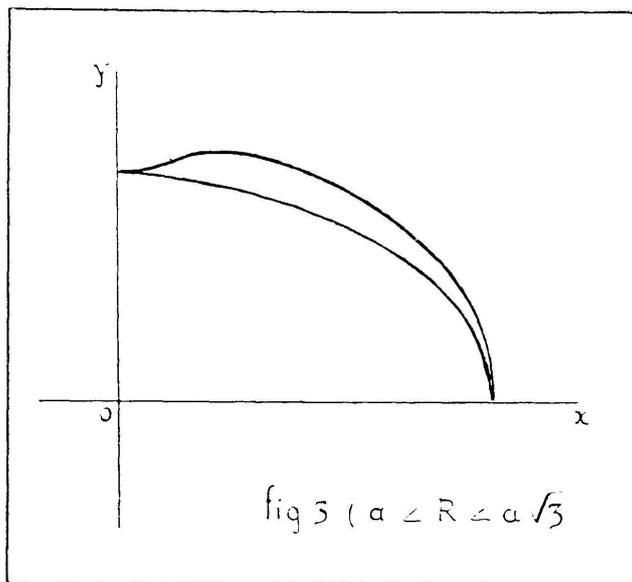
$$2z = \frac{x^2}{\frac{R^2 + a^2}{h}} + \frac{y^2}{\frac{R^2 - a^2}{h}}$$

par les plans normaux à son axe.

1.  $R > a$  (axe conoïdal intérieur au cylindre).

Le paraboloid est elliptique, les coniques de section sont des ellipses.

Les deux formes des podaires sont reproduites dans les figures 3 et 4.



2.  $R = a$  (axe conoïdal génératrice du cylindre).

Il n'y a plus qu'une seule cloison  $\Sigma$ ; ce cas doit donc être écarté.

3.  $R < a$  (axe conoïdal extérieur au cylindre).

Le paraboloid est hyperbolique, les coniques de section sont des hyperboles; les podaires ont un point double au centre de ces hyperboles.

Lorsque, dans le premier cas,  $a$  est nul — l'axe conoïdal est celui

du cylindre et les deux volumes conoïdaux partiels sont équivalents — la surface ( $s'_1$ ) se réduit au paraboloidé de révolution

$$x^2 + y^2 - 2 \frac{R^2}{h} z = 0 ;$$

une vérification partielle serait très aisée.

§ 18. Surfaces ( $s_1$ ) attachées à la sphère.

$$(X - a)^2 + Y^2 + Z^2 - R^2 = 0 .$$

Ici

$$\Lambda \equiv \frac{4 a^2 x^2}{(x^2 + y^2)^2} - 2 \frac{z^2 + a^2 - R^2}{x^2 + y^2}$$

et les surfaces ( $s_1$ ) ont pour équation, calculs effectués,

$$3 [4 a^2 x^2 - 2 (x^2 + y^2) (a^2 - R^2)] z - 2 z^3 (x^2 + y^2) - 3 h (x^2 + y^2)^2 + \Theta (x, y) = 0 ;$$

$\Theta$  étant homogène et de degré 2.

En supposant nulle cette fonction, on obtient la surface particulière ( $s'_1$ ) d'équation

$$2 z^3 (x^2 + y^2) + 3 h (x^2 + y^2)^2 - 6 z [(R^2 + a^2) x^2 + (R^2 - a^2) y^2] = 0 .$$

Ecrivons-la

$$(x^2 + y^2)^2 - \frac{2 z}{h} \left[ \left( R^2 + a^2 - \frac{z^2}{3} \right) x^2 + \left( R^2 - a^2 - \frac{z^2}{3} \right) y^2 \right] = 0 ;$$

( $s'_2$ ) apparaît comme le lieu des podaires centrales des coniques, sections parallèles à  $xOy$  de la surface

$$\frac{x^2}{2 \frac{z}{h} \left( R^2 + a^2 - \frac{z^2}{3} \right)} + \frac{y^2}{2 \frac{z}{h} \left( R^2 - a^2 - \frac{z^2}{3} \right)} - 1 = 0 .$$

Remarquons que ces coniques ont pour lieux de leurs sommets les paraboles semi-cubiques

$$y = 0 \quad x^2 = 2 \frac{z}{h} (R^2 + a^2) - \frac{2 z^3}{3 h}$$

et

$$x = 0 \quad y^2 = 2 \frac{z}{h} (R^2 - a^2) - \frac{2 z^3}{3 h} ;$$

dans le cas des sections elliptiques ( $R < a$ ), ceci peut servir de définition à ces anti-podaires.

§ 19. — Reprenons l'assertion évidente qui permet d'associer diverses surfaces (S): toute modification des  $\Lambda_i$ , donc de (S), qui n'altère point  $\Lambda$  n'altère point  $\Sigma V_i$ .

Nous donnerons deux exemples.

1. Cylindres associés au cylindre circulaire

$$(X - l)^2 + Y^2 - a^2 = 0 .$$

Nous avons trouvé

$$\Lambda \equiv \frac{4l^2 x^2}{(x^2 + y^2)^2} - 2 \cdot \frac{l^2 - a^2}{x^2 + y^2} .$$

Substituons à la base circulaire l'ovale de Cassini

$$[(X - l)^2 + Y^2]^2 \mp b^2(X - l)^2 - a^2 Y^2 = 0$$

ou le limaçon de Pascal

$$[(X - l)^2 + Y^2 - 2a(X - l)]^2 - b^2[(X - l)^2 + Y^2] = 0 ;$$

il vient respectivement

$$\Lambda \equiv \frac{16l^2 x^2}{(x^2 + y^2)^2} - 2 \cdot \frac{2l^2(3x^2 + y^2) \mp b^2 x^2 - a^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

et

$$\Lambda = \frac{16(a + l)^2 x^2}{(x^2 + y^2)^2} - 2 \cdot \frac{2l^2(3x^2 + y^2) + 4a(a + 2l)x^2 - b^2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} .$$

Dans ces trois cas,  $\Lambda$  est donc de la forme

$$2 \cdot \frac{Ax^2 + By^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

et les cylindres peuvent être convenablement associés; la surface ( $s'_1$ ) attachée à cet ensemble

$$(x^2 + y^2)^2 - 2 \frac{z}{h} (Ax^2 + By^2) = 0$$

est le lieu des podaires centrales des sections normales à l'axe du paraboloidé

$$\frac{x^2}{\left(\frac{A}{h}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{B}{h}\right)} - 2z = 0 .$$

## 2. Surfaces de révolution associées à la sphère

$$(X - l)^2 + Y^2 + Z^2 - a^2 = 0 .$$

Nous avons trouvé

$$\Lambda \equiv \frac{4l^2 x^2}{(x^2 + y^2)^2} - 2 \frac{z^2 + l^2 - a^2}{x^2 + y^2} .$$

Substituons à la méridienne circulaire du plan  $xOy$  une conique ou un ovale de Cassini d'axe parallèle à  $z'z$ ; nous obtenons les surfaces de révolution

$$a[(X - l)^2 + Y^2] + bZ^2 - 1 = 0$$

et

$$[(X - l)^2 + Y^2 + Z^2]^2 \mp b^2[(X - l)^2 + Y^2] - a^2 Z^2 = 0$$

dont l'axe est parallèle à l'axe conoïdal. Il vient respectivement

$$\Lambda \equiv \frac{4l^2 x^2}{(x^2 + y^2)^2} - 2 \frac{al^2 + bz^2 - 1}{x^2 + y^2}$$

et

$$\Lambda \equiv \frac{16l^2 x^2}{(x^2 + y^2)^2} - 2 \frac{2l^2(3x^2 + y^2) \mp b^2(x^2 + y^2) + 2z^2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} .$$

Dans les trois cas  $\Lambda$  est donc de la forme

$$2 \cdot \frac{Ax^2 + By^2 + Cz^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} ;$$

les surfaces peuvent être convenablement associées; la surface ( $s'_1$ ) attachée à cet ensemble,

$$(x^2 + y^2)^2 - 2 \frac{z}{h} (Ax^2 + By^2) - 2 \frac{Cz^3}{3h} (x^2 + y^2) = 0 ,$$

ou

$$(x^2 + y^2)^2 - 2 \frac{z}{h} [(A + Dz^2)x^2 + (B + Dz^2)y^2] = 0$$

est le lieu des podaires centrales des sections normales à l'axe de la surface cubique

$$\frac{x^2}{\frac{2z}{h}(A + Dz^2)} + \frac{y^2}{\frac{2z}{h}(B + Dz^2)} - 1 = 0 .$$

Ces coniques ont pour lieu des sommets les paraboles semi-cubiques

$$\begin{aligned} y = 0 & \quad z^2 = 2 \frac{z}{h}(A + Dz^2) \\ x = 0 & \quad y = 2 \frac{z}{h}(B + Dz^2) ; \end{aligned}$$

dans les cas des sections elliptiques ceci peut servir de définition aux anti-podaires car les deux paraboles sont réelles.

§ 20. — Reprenons l'expression (7) et supposons  $\sigma$  tracée sur la surface  $(s_0)$  d'équation

$$\frac{1}{q} \left( \frac{\Lambda_{q-1}^3}{\Lambda_q^3} - 2 \frac{\Lambda_{q-2}}{\Lambda_q} \right) = 1 ,$$

ou

$$q \Lambda_q^2 + 2 \Lambda_q \Lambda_{q-2} - \Lambda_{q-1}^2 = 0 ;$$

il vient

$$\Sigma V_i = q \int \int_{\sigma} \frac{1}{2} (\alpha x + \beta y) d\sigma :$$

les volumes  $V_i$  ont pour moyenne arithmétique le volume conoïdal de même nature que limite la cloison  $\sigma$ .

Lorsqu'en particulier (S) est un cylindre dont les génératrices sont parallèles à  $z'z$ ,  $(s_0)$  est un cylindre; le degré de sa directrice plane est  $2q$ .

§ 21. — *Volume cylindro-conoïdal.* — Prenons pour équation du cylindre circulaire (S)

$$F \equiv (X - a)^2 + Y^2 - R^2 = 0 .$$

En cette hypothèse

$$\Lambda_q \equiv x^2 + y^2$$

$$\Lambda_{q-1} \equiv -2ax$$

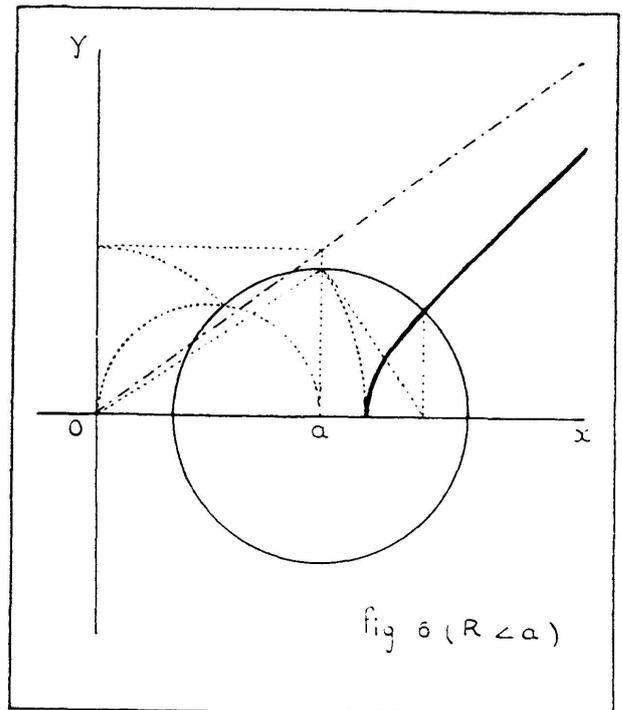
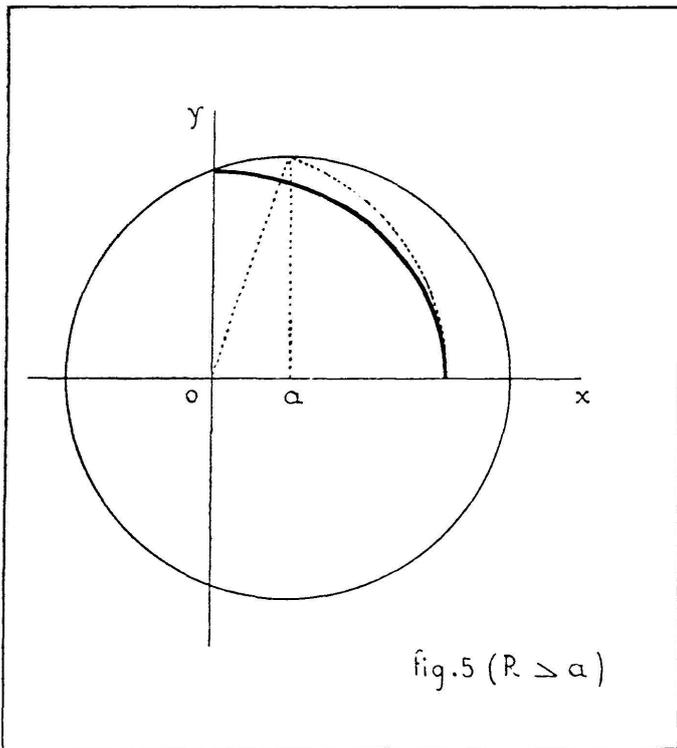
$$\Lambda_{q-2} \equiv a^2 - R^2 .$$

( $s_0$ ) a pour équation

$$(x^2 + y^2)^2 - [(R^2 + a^2)x^2 + (R^2 - a^2)y^2] = 0 ;$$

la directrice de ce cylindre est la podaire centrale de la conique

$$\frac{x^2}{R^2 + a^2} + \frac{y^2}{R^2 - a^2} - 1 = 0 ;$$



ellipse ou hyperbole selon que  $R$  est supérieur ou inférieur à  $a$ , c'est-à-dire que l'axe conoïdal est intérieur ou extérieur au cylindre donné.

§ 22. — *Volume sphéro-conoïdal.* — Dans le cas de la sphère

$$(X - a)^2 + Y^2 + Z^2 - R^2 = 0$$

on obtiendra pour ( $s_0$ ) la surface d'équation

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (R^2 + a^2)x^2 - (R^2 - a^2)y^2 = 0 .$$

Sous la forme

$$(x^2 + y^2)^2 - [(R^2 + a^2 - z^2)x^2 + (R^2 - a^2 - z^2)y^2] = 0$$

nous la reconnaissons comme le lieu des podaires centrales des sections, normales à l'axe conoïdal, de la surface

$$\frac{x^2}{R^2 + a^2 - z^2} + \frac{y^2}{R^2 - a^2 - z^2} - 1 = 0 .$$

Ces sections sont d'ailleurs des coniques à centre dont les sommets décrivent les circonférences

$$\begin{aligned} y = 0 & \quad x^2 + z^2 = R^2 + a^2 \\ x = 0 & \quad y^2 + z^2 = R^2 - a^2 ; \end{aligned}$$

lorsque  $R$  est supérieur à  $a$  ces deux courbes sont réelles et la propriété envisagée peut servir de définition aux anti-podaires.

§ 23. — Prenons encore les cyclides d'équation

$$\begin{aligned} (X^2 + Y^2 + Z^2)^2 - 4h(AX^2 + BY^2 + CZ^2) \\ - 4k(aX + bY + cZ) \pm l^4 = 0 , \end{aligned}$$

l'axe conoïdal étant toujours  $z'Oz$ .

Dans le cas actuel

$$\begin{aligned} \Lambda_q & \equiv (x^2 + y^2)^2 , \\ \Lambda_{q-1} & \equiv 0 , \\ \Lambda_{q-2} & \equiv 2Z^2(x^2 + y^2) - 4h(Ax^2 + By^2) ; \end{aligned}$$

l'équation de  $(s_0)$  s'écrit

$$(x^2 + y^2)^2 + z^2(x^2 + y^2) - 2h(Ax^2 + By^2) = 0$$

ou

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2) - 2h(Ax^2 + By^2) = 0 ;$$

c'est la surface trouvée au § 21, sauf à poser

$$\begin{aligned} 2Ah & = R^2 + a^2 , \\ 2Bh & = R^2 - a^2 . \end{aligned}$$

Ce résultat lie donc, une fois de plus, sphères et cyclides; il se présentait un résultat analogue dans l'étude des aires ou des volumes cylindriques et coniques <sup>1</sup>.

§ 24. — Considérons le cas des surfaces (S) d'équation

$$\Lambda_2 + \Lambda_1 + \Lambda_0 = 0 ,$$

dont les sections normales à  $z'z$  sont rencontrées en deux points par tout plan contenant  $z'z$ . Un conoïde y détermine deux nappes, et

$$\Sigma V_i = \frac{1}{2} \int_{\sigma} (\varrho_1^2 + \varrho_2^2) (\alpha x + \beta y) d\sigma$$

donne l'expression du noyau conoïdal que limitent  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  dans le seul cas où les deux nappes se trouvent de part et d'autre de l'axe  $z'z$ : axe conoïdal intérieur au cylindre ou coupant la sphère, dans les cas précédents.

Dans le cas contraire, le volume du même noyau a pour expression

$$N = \frac{1}{2} \int_{\sigma} |\varrho_2^2 - \varrho_1^2| (\alpha x + \beta y) d\sigma .$$

c'est-à-dire

$$N = \frac{1}{2} \int_{\sigma} \frac{|\Lambda_1|}{\Lambda_2^2} \sqrt{\Lambda_1^2 - 4\Lambda_0\Lambda_2} (\alpha x + \beta y) d\sigma \quad (6)$$

Si donc  $\sigma$  est tracée sur la surface ( $s_2$ ) d'équation

$$\Lambda_2^4 + 4\Lambda_2\Lambda_1^2\Lambda_0 - \Lambda_1^4 = 0$$

le volume du noyau équivaut à celui du conoïde que limite  $\sigma$ .

§ 25. — Prenons l'exemple du cylindre circulaire

$$(X - a)^2 + Y^2 - R^2 = 0 .$$

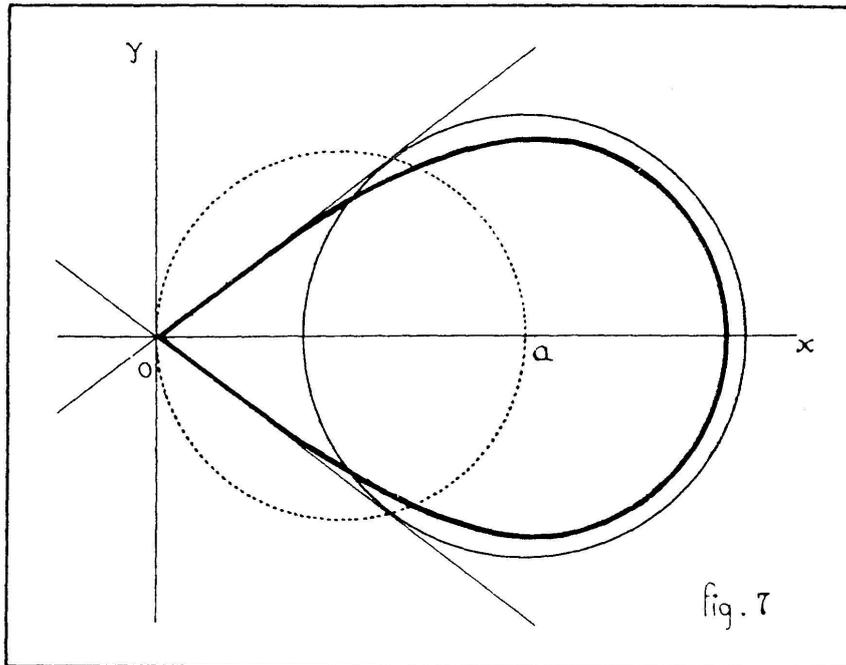
<sup>1</sup> A. BUHL, *Annales de la Faculté de Toulouse*, t. VII, 5<sup>me</sup> mémoire, pages 198-199.

L'équation de la surface ( $s_2$ ) s'écrit, tous calculs faits <sup>1</sup>,

$$(x^2 + y^2)^4 - 16a^2x^2[R^2x^2 + (R^2 - a^2)y^2] = 0 ;$$

il s'agit d'un cylindre à directrice du huitième degré avec point quadruple à l'origine.

1.  $R < a$  (axe conoïdal extérieur au cylindre; noyau véritable) (fig. 7).



Les tangentes au point multiple sont les tangentes à la circonférence directrice; d'autre part l'axe  $Ox$  est rencontré au point d'abscisse  $2\sqrt{Ra}$ , intérieur à la circonférence précédente.

2.  $R > a$  (axe conoïdal intérieur au cylindre) (fig. 8).

Les tangentes précédentes n'existent plus; le point sur  $Ox$ , toujours intérieur à ladite circonférence, subsiste.

Dans les figures 7 et 8 les demi-courbes seules ont été dessinées.

§ 26. — Un résultat simple s'obtient encore en considérant un cylindre dont la directrice est le limaçon de Pascal

$$(X^2 + Y^2 - 2aX)^2 - b^2(X^2 + Y^2) = 0 .$$

l'axe conoïdal étant ici la ligne des points doubles  $z'z$ .

<sup>1</sup> En coordonnées polaires

$$\rho^4 = 16a^2 \cos^2 \theta (R^2 - a^2 \sin^2 \theta) .$$

Avec

$$\Lambda_2 \equiv (x^2 + y^2)^2 ,$$

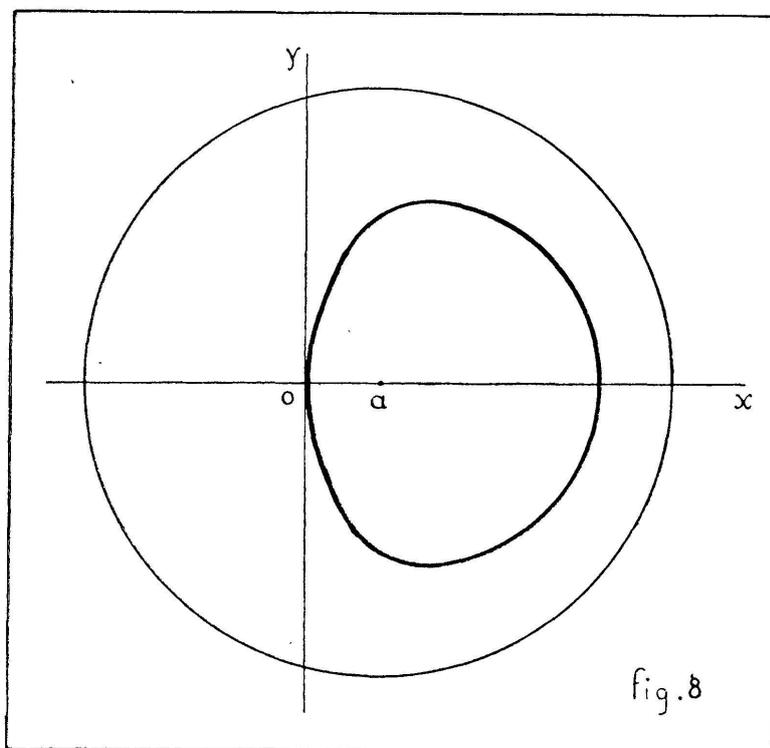
$$\Lambda_1 \equiv -4ax(x^2 + y^2) ,$$

$$\Lambda_0 \equiv 4a^2x - b^2(x^2 + y^2) ,$$

s'obtient l'équation <sup>1</sup> de ( $s_2$ ):

$$(x^2 + y^2)^3 - 64a^2b^2x^2 = 0 .$$

Ce cylindre offre une directrice sextique tricirculaire, dont la forme rappelle celle de la figure 2 et se trouve entièrement comprise à l'intérieur du limaçon générateur.



§ 27. — Enfin, dans le cas de la sphère

$$(X - a)^2 + Y^2 + Z^2 - R^2 = 0 ,$$

l'équation de ( $s_2$ ) est la suivante:

$$(x^2 + y^2)^4 - 16a^2x^2[(R^2 - z^2)x^2 + (R^2 - a^2 - z^2)y^2] = 0 .$$

Cette écriture fait prévoir la forme des sections parallèles à  $xOy$ , donc celle de la surface, lieu de ces sections.

Septembre 1930.

<sup>1</sup> En coordonnées polaires

$$\rho^2 = \pm 16ab \cos \theta .$$