

# BIBLIOGRAPHIE

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1931)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## BIBLIOGRAPHIE

---

Emile PICARD. — **Eloges et Discours académiques.** — Un volume in-8° de VIII-400 pages. Prix: 50 francs. Gauthier-Villars et C<sup>ie</sup>. Paris, 1931.

Ce volume rassemble des Eloges et des Discours écrits à propos de Science mais où se manifeste un talent littéraire digne du Membre de l'Académie française. Il fait d'ailleurs suite à des « Discours et Mélanges » et à des « Mélanges de Mathématiques et de Physique » déjà analysés dans *L'Enseignement mathématique* (t. 24, 1924-25, p. 162).

C'est de la brillante philosophie dont la phrase la plus saillante, due à Fontenelle et reproduite par M. Picard dans son Introduction, nous dit que « la façon de découvrir vaut mieux que la plupart des choses qu'on découvre ». Il semble aussi, dit le savant auteur, que les réalités profondes des choses soient exprimées par des relations entre les symboles de l'Analyse.

Le Recueil commence par un Discours sur Pascal, mathématicien et physicien. L'auteur des *Pensées*, en lesquelles certains ont voulu voir une apologie de l'esprit de finesse opposé à l'esprit géométrique, est dépeint sous un jour bien différent. Au sujet du chevalier de Méré, n'écrivait-il pas à Fermat: « Il a un très bon esprit, mais il n'est pas géomètre; et c'est un grave défaut ». Pascal est également présenté comme créateur du Calcul des probabilités et comme partisan de concepts, relatifs aux infiniment petits, ayant déjà la nature de ceux du Calcul infinitésimal moderne.

Avec Marc Seguin, nous allons du côté de la technique. Neveu de Montgolfier, Seguin eût le culte de la chaudière, du bateau à vapeur, du chemin de fer. Il ne pouvait manquer de revenir à la navigation aérienne; il prédit qu'on parviendrait à voyager aussi facilement dans les airs qu'on le fait aujourd'hui sur mer. Ce technicien avait pour Newton une admiration sans bornes et se permettait d'être un ennemi de l'éther.

Abraham Bréguet nous fait philosopher sur le temps. Certes on peut, dans l'horlogerie, ne voir que de la technique, mais si l'on pense qu'avec toute horloge on se propose d'imiter la rotation de la Terre, l'horloger prend figure d'astronome. Et quelle révélation avec les montres perpétuelles, de Bréguet, se remontant d'elles-mêmes quand on les porte, alors qu'aujourd'hui certaines firmes nous présentent ces curieux mécanismes comme des nouveautés.

Jules Tannery nous ramène dans la philosophie proprement dite et d'abord dans l'histoire de la Science car il brossa très heureusement des portraits de Puiseux, Hermite, Bouquet. Le philosophe révèle un poète exprimant en vers le désespoir issu des systèmes qui s'écroulent pour renaître et s'écrouler encore. Le mathématicien songe à la physiologie et particulièrement à la loi de Fechner sur la sensation proportionnelle au logarithme de l'excitation. Il aperçoit des difficultés aujourd'hui précisées mais non aplanies par la Théorie des ensembles. Il nous dit que deux Univers, où des objets seraient différents mais liés par les mêmes rapports, nous appaî-

traient comme identiques. C'est une idée très relativiste, chère à Poincaré. Il réfute spirituellement les vues de Le Dantec sur la pensée épiphénoménale et se moque quelque peu de l'homme moyen de Quételet. Il ne croit pas à l'expérience de la vie courante; nous changeons et ce que nous appelons notre expérience est celle d'un autre que nous ne sommes plus !

M. Emile Picard, appelé à l'Académie française, dut, suivant l'usage, prononcer, le 11 février 1926, un Discours de réception consacré à son prédécesseur Charles de Saulses de Freycinet. Tâche délicate car il y avait beaucoup plus à dire du patriote et de l'homme d'Etat que du géomètre. Néanmoins, les idées de Freycinet sur la Géométrie sont analysées sans heurt et avec rappel de la boutade relative à la Géométrie pure dont on a pu dire, avec raison, que c'est une science où l'on ne sait jamais de quoi on parle, ni si ce que l'on dit est vrai.

Le double Centenaire de Newton et de Laplace est l'occasion d'un Discours prononcé à la Sorbonne, le 4 mai 1927. Newton y est révélé adepte de la pensée *patient* et comme beaucoup moins admiré par ses contemporains qu'on ne pourrait croire. Laplace connut également des difficultés de début, notamment avec d'Alembert. Finalement il reste le mécanicien *pratique* du Ciel; la merveilleuse analyse d'un Sundmann est sans intérêt usuel.

Le Cinquantième de la Fondation du Bureau international des Poids et Mesures (5 octobre 1927) est l'occasion de montrer combien est passé l'âge héroïque où, avec un matériel très simple, on pouvait faire de grandes découvertes. D'ailleurs, pour les Membres du Bureau, les variations d'éta-lons, si naturellement acceptées par les relativistes, ne peuvent être qu'une cause de désespoir.

La grandiose figure de Jean-Baptiste Biot tend, pour la génération moderne, à s'estomper quelque peu dans les brumes du passé. M. Emile Picard la remet en pleine et belle lumière.

L'inauguration de l'Institut Henri Poincaré (17 novembre 1928) permet de rappeler que la Physique est ramenée maintenant à une Géométrie généralisée sans que l'intelligibilité des choses y gagne forcément.

Le troisième Centenaire de la naissance de Christaan Huygens (13 avril 1929) rapproche le génie du physicien hollandais de celui de Newton.

Enfin le volume se termine par le « Coup d'œil sur l'Histoire des Sciences et des Théories physiques » déjà publié à part et analysé ici l'an dernier (p. 172).

M. Emile Picard, en de jolies périodes, en un style toujours châtié, qui joint souvent, à la précision historique, le charme de l'anecdote, publie, au total, un volume d'une lecture très attachante d'où la philosophie se dégage sous une forme sereine et pleine d'espérances.

A. BUHL (Toulouse).

Solomon LEFSCHETZ. — **Topology** (American mathematical Society, Colloquium Publications, volume XII). — Un vol. grand in-8° de x-410 pages. Prix: \$ 4,50. American mathematical Society, New-York. Hirschwaldsche Buchhandlung, Berlin. Bowes & Bowes, Cambridge, England. 1930.

La topologie, ou Analysis Situs, a surtout été représentée en France par les travaux de Jordan, de Poincaré et de M. Emile Picard, maître dont M. Lefschetz est un disciple. Elle a trouvé beaucoup plus d'adeptes qu'on

ne pourrait croire en Amérique même. Parmi ceux-ci, il faut surtout citer J.-W. Alexander et O. Veblen, ce dernier venant de publier une seconde édition d'un livre dont l'analyse se placera tout naturellement après celle-ci. Au point de vue historique la création de l'algorithme remonte à Riemann, Betti, Kronecker.

Cette création, qu'on considère parfois comme une brillante fantaisie de l'esprit analytico-géométrique, apparaît, lorsqu'on y regarde de plus près, comme impérieusement conditionnée par la nécessité. Les symboles et les identités les plus simples du Calcul intégral, les petites formules de Green, Riemann, Stokes, admettent des extensions où le monde des variétés d'intégration apparaît promptement comme étant d'une complexité qu'il ne saurait même être question de limiter; on peut toutefois se proposer d'ordonner cette complexité et c'est là une des premières voies conduisant obligatoirement à la topologie. Une seconde voie, à peine distincte d'ailleurs de la première, est celle de l'uniformisation des fonctions algébriques et, plus généralement, des fonctions multiformes. Les variétés uniformisantes, dont les surfaces de Riemann sont un cas des plus simples, sont déjà loin de nos concepts spatiaux habituels. Plus généralement encore, on peut remarquer qu'il n'y a point de concepts géométriques qui ne se traduisent, à volonté, par de l'analyse. Mais l'assertion inverse apparaît comme incomparablement plus douteuse et l'on peut dire que la topologie est l'art de *figurer*, autant que possible, les créations mathématiques dues à la seule logique. Il faut créer des espaces et des propriétés spatiales pour illustrer, au delà du domaine immédiatement sensible, ce que notre raisonnement peut donner; il faut analyser soigneusement des notions géométriques d'apparence simple, telles la continuité, pour ne point être conduit, comme cela n'est que trop arrivé, à des résultats faux et dont l'inexactitude tenait à l'abus de propositions intuitives insuffisamment ordonnées. Un des premiers résultats de la science ordonnatrice sera de nous faire loger, dans le même domaine topologique, des constructions logiques qui pourront se rapporter à des objets très différents pour lesquels il y aura alors *homéomorphie*. Que de théories actuelles sont homéomorphes, sinon d'un bout à l'autre, du moins sur des étendues considérables.

Ceci saute aux yeux rien qu'en examinant les quinze pages de bibliographie placées à la fin du beau livre de M. Lefschetz. Les surfaces et espaces de Riemann, le Calcul tensoriel, les ensembles, les groupes, les considérations dynamiques, la géométrie algébrique, les fonctions de deux et de  $n$  variables complexes, ... ont recours à la topologie non pas pour lui demander des secours extrêmement divers mais, tout au contraire, des procédés d'ordination tirés d'un même moule. Ces procédés sont essentiellement plastiques car, si la topologie ne se fie pas intuitivement au continu, elle n'en est pas moins la science des propriétés conservées par déformation continue. C'est la grande génératrice d'espaces abstraits, au sens de M. Fréchet.

Il doit évidemment y avoir une topologie des espaces amétriques mais ceci n'empêche pas que les premiers procédés d'exploration peuvent être métriques, invoquer la *distance* euclidienne, la *sphère*, toutes choses nécessaires pour se représenter élémentairement le *voisinage* d'un point. Hausdorff, Urysohn, Fréchet, ... ont suffisamment montré comment l'on passait des cas métriques aux cas amétriques. Le simplexe, la cellule, la sphère, le complexe sont des éléments constructifs fondamentaux s'alliant en des constructions polyédrales. La notion de complexe surtout est déjà un aboutissement. On

la trouve au début du livre comme vers la fin avec les complexes infinis intervenant dans la transformation d'espaces métriques dits *compact*. M. Lefschetz fait remarquer avec raison toute la confusion qui s'est établie à propos des nombres de Betti. Il n'y a cependant là qu'une question linéaire, homologique à réduction canonique introduisant des coefficients de *torsion* (Poincaré); tout devient clair quand la notion de complexe est correctement appliquée à des assemblages de ceux-ci. Les indices de Kronecker deviennent également d'un maniement simple quand on a convenablement défini le concept d'intersection et surtout de *chaîne* d'intersections. Ceci dit à propos de choses évidemment anciennes. Quant à l'allure moderne de la topologie, il faut surtout spécifier que cette science, en s'amplifiant, n'a pas pris une allure de plus en plus rébarbative; c'est, au contraire, une analyse, de groupes, de matrices, appuyée sur un bon sens d'ordre supérieur, analyse qui ne peut plus être ignorée dans une foule de circonstances, notamment quand on veut disséquer, de manière féconde, l'épineuse notion du continu.

A. BUHL (Toulouse).

Oswald VEBLEN. — **Analysis Situs**. Seconde édition (American mathematical Society, Colloquium Publications, Volume V, Part II). — Un vol. grand in-8° de x-196 pages. Prix: \$2,00. American mathematical Society, New-York. Bowes & Bowes, Cambridge, England. Hirschwaldsche Buchhandlung, Berlin. Albert Blanchard, Paris. Nicola Zanichelli, Bologna. 1931.

La première édition de cet ouvrage date de 1921. Elle fut publiée comme seconde partie d'un volume dont le commencement, intitulé *Functionals and their Applications selected Topics including integral Equations*, était dû à Griffith Conrad Evans. *L'Enseignement mathématique* n'y consacra que quelques lignes dans le Bulletin bibliographique du tome XXII (1921-22, p. 325). Evidemment l'ouvrage méritait mieux et d'autant plus qu'il s'inspirait surtout des travaux de Poincaré. Aujourd'hui le triomphe est plus certain encore et il est hautement suggestif de voir deux collègues, de la même université de Princeton, MM. Lefschetz et Veblen revenir ensemble, à quelques mois d'intervalle, sur la Topologie ou l'Analysis Situs. D'ailleurs les deux géomètres semblent s'être entendus pour que leurs exposés ne fassent pas double emploi, bien qu'il faille évidemment commencer, de toutes manières, par les cellules, les graphes, les complexes.

Notons, chez M. Veblen, une remarque qui reflète particulièrement l'esprit de Poincaré. Les théorèmes de l'Analysis Situs seraient de deux catégories principales: ceux qui traitent du continu et ceux qui ont un caractère combinatoire et énumératif mais qu'on ne se gêne point de démontrer en utilisant le continu. Henri Poincaré, en effet, voyait bien les fondements de la Science du côté des nombres entiers et de leurs combinaisons discrètes mais il n'en proposait pas moins beaucoup de reconnaissance pour le continu qui « si tout sort du nombre entier, était seul capable d'en faire tant sortir ».

Plus loin, nous retrouvons encore les groupes linéaires et les matrices comme instruments fondamentaux d'exploration. Et ce sont bien les mêmes matrices, à multiplication non commutative, que celles dont il est question, avec M. Weyl, en géométrie unitaire, quand il s'agit de fonder, comme nous le rappelons plus loin, la Mécanique quantique. Cette Mécanique et la topo-

logie ont des schèmes générateurs analogues situés, soit dans les principes du Calcul intégral, soit dans les notions spatiales élémentaires qu'il faut étendre parce que ni la Logique ni la Physique ne s'accomodent indéfiniment de ces notions.

Avec les matrices d'orientation, M. Veblen nous rappelle aussi Kirchoff qui, en 1847, employait déjà une telle matrice pour déterminer convenablement la distribution de l'électricité dans un réseau de fils conducteurs. De simples ouvriers électriciens montrent souvent, dans les installations qu'ils effectuent, un ingénieux esprit topologique; ils sont aidés, il est vrai, par divers procédés, par exemple par les couleurs différentes des enveloppes isolantes, mais le mathématicien ne dédaigne nullement de s'aider de même en remplaçant les jeux de couleurs par des jeux d'indices. Faut-il rappeler aussi les bateleurs qui se font enfermer dans des malles, après avoir été couverts de liens dont *presque* toutes les intersections sont cachetées, et qui en sortent, un instant après, absolument libres. Un graphe, tracé de quelques coups de plume, explique généralement le truc de façon extrêmement banale.

Avec les complexes à deux dimensions, les nappes, nous retrouvons aussi le problème des quatre couleurs, le ruban de Möbius et plus généralement la notion de multiplicité *orientable* ou non. On peut d'ailleurs tenter d'étendre tout ce qui précède aux multiplicités et complexes à  $n$  dimensions. Les nombres de Betti sont associés aux circuits orientés.

Un dernier Chapitre, le cinquième, s'occupe du groupe fondamental qui naît d'abord avec la notion d'isotopie, cette dernière se rapportant à la possibilité ou à l'impossibilité de certaines représentations paramétriques pour certaines déformations. Le sujet conduit à des problèmes non encore résolus et vraisemblablement difficiles.

Deux Appendices terminent l'ouvrage. Le premier traite des *nombres-intersection* de Poincaré et Kronecker. Le second, écrit avec la collaboration de M. Philip Franklin, s'occupe des matrices dont les éléments sont entiers. C'est, cette fois, la Théorie des Nombres, avec les équations de Diophante, qui s'associe au symbolisme topologique.

M. Veblen, sans altérer beaucoup sa première édition, a su la moderniser et lui laisser l'aspect d'un remarquable et ingénieux instrument de recherche.

Souhaitons que notre grand Henri Poincaré inspire, en Europe et particulièrement en France, des travaux dont le modèle est si bien présenté par des géomètres américains.

A. BUHL (Toulouse).

**JAMES B. SCARBOROUGH. — Numerical mathematical Analysis. —** Un volume grand in-8° de XIV-416 pages et 25 figures. Prix: \$5,50. The Johns Hopkins Press, Baltimore. Humphrey Milford, Londres. University Press, Oxford. 1930.

Beau volume de science pratique très américaine. Quel éditeur français croirait intéresser un public étendu avec un ouvrage consacré, au premier aspect, uniquement à la technique des calculs numériques. Les presses universitaires d'outre Atlantique n'hésitent pas. Elles ne semblent nullement téméraires dès que l'on a parcouru le livre et que l'on a constaté quel art il peut y avoir à faire des mises en nombres, art qui n'apparaît point comme inférieur à l'art analytique et le rencontre en maints endroits. Il

semble que ce soit précisément l'exposition de telles rencontres qui ait tenté l'auteur. Partons du plan révélé d'abord par la table des matières.

I. The accuracy of approximate calculations. — II. Interpolation. Differences. Newton's formulas. — III. Interpolation. Central-difference formulas. — IV. Interpolation. Lagrange's formula. Inverse interpolation. — V. The accuracy of interpolation formulas. — VI. Interpolation with two independent variables. Trigonometric interpolation. — VII. Numerical differentiation and integration. — VIII. The accuracy of quadrature formulas. — IX. The solution of numerical algebraic and transcendental equations. Equations in one unknown. Equations in several unknowns. — X. Graeffe's root-squaring method for solving algebraic equations. — XI. The numerical solution of differential equations. The method of successive approximations. — XII. Convergence and accuracy of the iteration process. — XIII. Other methods for the numerical solution of differential equations. — XIV. The normal law of error and the principle of least squares. — XV. The precision of measurements. — XVI. Empirical formulas. — XVII. Harmonic analysis of empirical functions.

Il y a, dans cette suite de titres, bien des choses dont tous les mathématiciens ont quelque idée. Mais combien d'autres sont profondément inconnues. A part quelques spécialistes, qui connaît les formules d'interpolation *centrale*, c'est-à-dire les formules où l'on fait usage d'une certaine symétrie centrale dans le tableau des différences. Le procédé remonte cependant à Stirling et à Bessel. Une formule de ce dernier réduit la symétrie centrale à un développement suivant des moyennes arithmétiques de différences.

En V, l'approximation obtenue par les différentes formules d'interpolation est récapitulée de manière saisissante en un tableau simple et bref qui permet de comparer les différentes formes de restes. En VI, le cas de deux variables est toute autre chose qu'une curiosité; les tableaux numériques abondent encore, l'intégrale elliptique qui dépend d'une limite et d'un paramètre est, tout naturellement, mise à contribution.

En VII, la définition même est d'un puissant intérêt. La différentiation numérique consiste à rechercher, entre valeurs données de la fonction, une valeur de la dérivée. Le problème est beaucoup plus scabreux que pour l'intégration, la courbe d'interpolation pouvant, par exemple, présenter de petites sinuosités qui, tout en n'altérant guère une aire, font exécuter une danse fantastique à la tangente. Néanmoins, il y a une différentiation numérique susceptible d'une utile discussion et qui donne des formules absolument comparables à celles de l'interpolation d'ordonnées. Les quadratures numériques sont plus connues, surtout avec la méthode des trapèzes, la règle du tiers de Simpson et celle des trois huitièmes d'où il faut rapprocher celle de Weddle. Il y a aussi des formules de quadrature à différences centrales. Après la formule de Gauss, qui jouit d'une juste célébrité, il ne faut pas méconnaître celle d'Euler qui est une formule de sommation prenant aisément l'allure d'une série *asymptotique*. Les séries de ce dernier type sont ainsi introduites de manière particulièrement naturelle.

La méthode de Graeffe, exposée en X, est certainement peu connue malgré son ingéniosité. Elle associe très simplement à l'équation aux racines  $x$ , une équation à racines  $x^2$ , ou même  $x^n$ , racines, en général, mieux séparées que les  $x$ . Et comme une équation  $x^n = k$  contient surtout des racines complexes, le procédé est également propre à un repérage approché de ces racines.

En XI, la généralisation des théories précédentes se trouve d'accord avec la méthode des approximations successives due à M. Emile Picard. On voit que les préoccupations utilitaires du début conduisent aussi à la haute analyse et que les approximations théoriques, dont fait usage cette analyse, ne sont point déflorées, de façon fâcheuse, quand on étudie d'abord, au point de vue numérique, des approximations élémentaires. En XIII, nous trouvons d'autres méthodes, plus particulièrement astronomiques, dues à J. C. Adams, Runge, Kutta, Milne. En XIV apparaît la loi de Gauss avec différentes variantes et la méthode des moindres carrés. En XVI nous avons les formules à coefficients déterminés empiriquement, et, en XVII, une analyse harmonique de telles formules. De nombreux tableaux, de belles figures, *beaucoup d'exercices* enrichissent ce livre où le calcul numérique avoisine toujours une analyse élégante et élevée. L'utile et l'original ont été rarement aussi bien associés. A. BUHL (Toulouse).

Vito VOLTERRA. — **Leçons sur la Théorie mathématique de la Lutte pour la Vie** rédigées par Marcel Brelot (Cahiers scientifiques publiés sous la direction de M. Gaston Julia. Fascicule VII). — Un vol. grand in-8° de vi-214 pages et 12 figures. Prix: 60 francs. Gauthier-Villars et C<sup>ie</sup>, Paris. 1931.

Ce livre semble appelé à un grand retentissement. Il n'apparaît point de manière absolument soudaine. Les préoccupations mathématico-biologiques de M. Vito Volterra sont connues depuis plusieurs années, ne serait-ce que par les communications faites, à ce sujet, dans les congrès scientifiques, par l'illustre géomètre italien. Mais enfin voici l'œuvre d'enseignement, le livre pratique qui intéressera prodigieusement les mathématiciens et s'imposera à l'attention des biologistes. Quelle sera l'attitude de ces derniers ? En verra-t-on quelques-uns prendre l'attitude hostile prise, par nombre de physiciens, vis-à-vis des Théories d'Einstein ? Ce serait tant pis pour ceux-là. Toutefois la partie semble déjà gagnée car le présent ouvrage renferme un nombre considérable de références biologiques ; c'est à croire que M. Volterra a consenti à travailler à la demande de certains naturalistes.

Il faut observer aussi que les naturalistes ne se sont jamais élevés contre la loi de Malthus sous prétexte qu'elle correspond à une équation différentielle linéaire. Or, ici, les problèmes les plus simples, au delà de cette loi primordiale mais simpliste, se traduisent encore par des équations linéaires ou faciles à ramener à ce type, telles que l'équation de Bernouilli. Plus loin, certes, les choses se compliquent ; il y a même des discussions empiriques ou approchées de courbes intégrales correspondant à des équations n'ayant vraisemblablement aucune propriété exacte, discussions à la Poincaré mais précisément bien à leur place dans le monde infiniment complexe des espèces animales portées à s'entre-détruire pour subsister. Le rédacteur de ces *Leçons*, M. Marcel Brelot, s'est d'ailleurs porté au secours des non-mathématiciens en insérant, dans le livre, des notes explicatives qui seront fort appréciées.

Les théories sont relativement simples quand diverses espèces ne font que se disputer une nourriture qui, pour ainsi dire, leur est extérieure. Mais ce n'est pas le cas général, la tentation de s'entre-dévorer étant tout ce qu'il y a de plus naturel. Une simplification intéressante s'introduit ici avec le concept des *équivalents*. Toute chair dévorée se transforme instantanément en la substance même des mangeurs, d'où de certaines lois où se conserve



la substance vivante indépendamment de toute considération individualiste. C'est une trouvaille théorique simple conditionnant des premières approximations fort intéressantes. Jusqu'ici on peut signaler le triomphe des lois ou plutôt des combinaisons de lois exponentielles; il y a également une ingénieuse analyse de déterminants nuls quand ce sont des individus de même espèce, ne se dévorant pas, qui se rencontrent mais reprenant un rôle actif dès que se rapprochent des espèces différentes à tendances dévorantes. Le paradoxe *apparent* commence également à se manifester; ainsi la chasse peut-être utile, dans une certaine mesure, à la *conservation* du gibier car elle détruit aussi des ennemis de celui-ci. Signalons également de curieuses différences d'analyse et de résultats biologiques suivant que les espèces s'entre-dévorant sont en nombre pair ou impair.

Un défaut manifeste des théories préliminaires est l'aboutissement à des fonctions à croissance indéfinie alors qu'évidemment aucune espèce vivante ne peut croître ainsi. Une analyse plus large s'impose alors et M. Volterra ne l'a pas rendue moins intéressante. Les associations biologiques favorisées ne sont pas celles qui possèdent l'impossible croissance indéfinie mais celles qui ont pour elles un caractère *conservatif* auquel il faut opposer naturellement le cas contraire du caractère *dissipatif*. Ces caractères se traduisent encore par une suggestive analyse de déterminants et de formes quadratiques.

Enfin tout cela ne serait pas complet si la notion de l'*hérédité* n'intervenait pas. On sait qu'il y a des phénomènes *mécaniques* d'hérédité qualifiés ainsi par M. Emile Picard. Il y a des réactions mécaniques retardées, des traînages, de l'hystérésis et l'idée d'hérédité semble avoir été empruntée ici à la biologie. Or l'hérédité mécanique, qui a été traitée par équations intégrales et équations intégro-différentielles, s'étend maintenant, à nouveau, vers la conception biologique primitive avec le même bagage analytique notablement perfectionné par M. Volterra qui est son principal créateur.

On perçoit même ici une nouvelle manière de comprendre que la théorie des équations intégrales n'est qu'une extension de l'analyse des formes linéaires et des déterminants. Reste toujours à savoir si les biologistes prendront l'attitude compréhensive. C'est la seule chose à souhaiter car, pour ce qui est des mathématiciens, le plus éclatant des succès ne peut manquer de couronner la tentative. Il faut attendre, de toutes parts, sur le sujet, de nombreux travaux qui constitueront définitivement une biologie mathématique.

A. BUHL (Toulouse).

Gaston JULIA. — **Leçons sur la Représentation conforme des Aires simplement connexes**, recueillies et rédigées par un groupe d'auditeurs (Cahiers scientifiques publiés sous la direction de M. Gaston Julia. Fascicule VIII). — Un vol. grand in-8° de VIII-114 pages et 39 figures. Prix: 30 francs. Gauthier-Villars et C<sup>ie</sup>. Paris. 1931.

Ces *Leçons sur la Représentation conforme* rappellent forcément de nombreuses expositions du sujet, notamment celle due à M. Emile Picard. Mais M. Julia a développé les choses d'une manière plus élémentaire, avec des exemples nouveaux qui facilitent grandement l'étude isolée. Une Introduction lie la question au Principe de Dirichlet et nous rappelle la méthode de Riemann intuitive mais insuffisante. Neumann, Schwarz, Poincaré, MM. Emile Picard, Painlevé, Carathéodory, Courant, Hilbert, Koebe,...

ont élucidé complètement les choses. La notion de « courbe de Jordan » avec quelques aperçus topologiques permet d'abrégé heureusement les énoncés.

La substitution linéaire, du type général homographique, est, à coup sûr, d'une importance spéciale. Elle contient les groupes fuchsien et kleinéens avec lesquels on peut dépasser le titre de l'ouvrage en allant à la représentation des surfaces de Riemann. En restant dans les aires simplement connexes, il y a encore grand intérêt à étudier les prolongements analytiques, au delà d'arcs de cercle, et les élégantes symétries dues à Schwartz.

Il faut un chapitre pour établir la possibilité de représenter sur un cercle un domaine plan quelconque  $D$  simplement connexe avec correspondance entre un rayon du cercle et une direction issue d'un point quelconque de  $D$ . Cauchy, Schwartz et Weierstrass sont les pionniers fondamentaux de la démonstration.

Les exemples que donne M. Julia sont ingénieusement liés les uns aux autres. D'abord les représentations des figures les plus diverses doivent être faites, de préférence, sur un demi-plan limité par l'axe réel. Les contours correspondent alors aux valeurs réelles d'une variable. On représente ainsi l'intérieur d'un angle, le domaine limité par deux arcs circulaires, le rectangle, à l'aide de l'intégrale elliptique de première espèce, puis le triangle et les polygones par des intégrales portant sur des facteurs en  $(z-a)^{\alpha}$ . Les polygones réguliers, convexes ou étoilés, ont aussi de très élégantes représentations sur le cercle. Même assertion pour l'ellipse, coupée des foyers aux sommets voisins, et pour le plan portant aussi certaines coupures.

A la fonction  $Z = f(z)$ , représentative de  $D$  sur le cercle  $|z| > 1$ , on peut adjoindre divers développements, tayloriens ou laurentiens, dont l'ensemble des coefficients satisfait à de certaines inégalités; la fonction  $Z$  elle-même et sa dérivée sont inféodées à des conditions de croissance. Ici les études sont modernes et signées Nevanlinna, Bieberbach, Faber, Kœbe.

Enfin la fonction  $f$  peut extrêmer de certaines intégrales simples ou doubles. Constater ceci est revenir au point de vue primitif de Riemann qu'il n'est pas impossible de perfectionner lorsqu'on en a repéré nettement les défauts. On voit que l'exposé de M. Julia ne manque point de vues intéressantes, grandement propres à susciter un travail original et fécond.

A. BUHL (Toulouse).

R. DE MONTESSUS DE BALLORE. — **Probabilités et Statistiques.** Leçons professées à l'Office national météorologique de France. Préface de M. Alliaume. — Un volume grand in-8° de x-212 pages et 17 figures. Prix : 60 francs. Hermann & C<sup>ie</sup>, Paris. 1931.

Ces *Leçons* ont un haut caractère d'originalité, ce que la Préface, écrite par M. Alliaume, Professeur à l'Université de Louvain, fait d'ailleurs admirablement ressortir.

La Statistique a naturellement demandé beaucoup au Calcul des Probabilités; ce dernier se croit tenu d'utiliser des tableaux d'observation pour en déduire des lois, sinon rigoureuses du moins susceptibles d'être qualifiées de « lois empiriques ». Un rôle aussi important n'est pas sans modifier quelque peu le Calcul en litige, sinon dans son essence, du moins dans ses méthodes analytiques approchées qui, sous prétexte que la Statistique ne donnera jamais que des lois approximatives, ne peuvent cependant être absolument

quelconques. Ainsi les formules combinatoires pourvues de factorielles sont généralement représentées, au delà d'un nombre d'épreuves assez grand, avec des simplifications dues à la formule de Stirling d'où, facilement, l'équation de Laplace avec son exponentielle en  $-x^2$ . On introduit ainsi des courbes en cloche, avec l'aspect symétrique bien connu, présentant malheureusement cette symétrie sans accord suffisant avec la structure de la statistique initiale. Il faut revenir aux factorielles jugées longtemps indésirables, dans les calculs pratiques, mais maintenant susceptibles d'être introduites grâce aux tables publiées, en 1927, par M. F.-J. Duarte et dont nous avons parlé, ici-même, avec d'autant plus d'empressement qu'elles furent excellentement typographiées, à Genève, par la maison Kündig, c'est-à-dire par l'imprimerie de *L'Enseignement mathématique*.

M. de Montessus définit soigneusement les différentes sortes de probabilités. Il y joint la probabilité *renforcée* qui paraît ainsi nommée par ce qu'elle est relative à une *association* de symptômes et cependant nous montre que les combinaisons de ces diverses probabilités peuvent encore être déjouées par certaines statistiques, telles les statistiques matrimoniales.

La *fonction de probabilité simple* ou *fonction binomiale* apparaît bientôt avec ses trois factorielles. C'est à cette notion que correspond la courbe en cloche dissymétrique mais réelle. La formule de Stirling et toute l'analyse laplacienne ne sont nullement délaissées. L'auteur les manie aussi habilement que n'importe quel probabiliste et peut alors les critiquer, dans leurs effets, quant à la représentation de la fonction binomiale et la détermination de son ordonnée maximum qui est *la mode*.

Certaines *formules de sommation*, finies, prouvent qu'on avait tort d'abandonner la même fonction binomiale, pour des représentations approchées, alors qu'il était parfaitement possible de faire jouer des combinaisons additives purement algébriques. On a laissé l'honneur de montrer cela à M. de Montessus et M. D. Mirimanoff a réattiré l'attention sur le procédé (*L'Ens. mathématique*, t. XXVII. 1928, p. 144).

Il y a des remarques analogues à faire sur les *moyennes* qui sont des ordonnées, comme la mode, et sur la *médiane* qui est une abscisse.

Le volume, au delà de ces considérations théoriques, comporte des applications et des exemples statistiques fort riches empruntés à la météorologie, à l'astronomie, aux phénomènes biologiques. Tous apparaissent comme beaucoup mieux traités par les méthodes originales de l'auteur que par la continuité intégrale qui, à coup sûr, n'est pas totalement détrônée, mais qui n'apparaît plus comme l'instrument idéal du Calcul des probabilités. Grâce à M. de Montessus, cette dernière science, dans ses rapports avec les théories statistiques, vient incontestablement de faire un grand pas.

Les Universités de Lemberg, Budapest, Vienne, Genève, la Société mathématique polonaise (Varsovie et Cracovie), l'Institut des Hautes Etudes de Belgique (Bruxelles) ayant également invité M. de Montessus à venir exposer verbalement ces nouveaux aspects de la science probabilitaire et statistique, il semble bien que, de toutes parts, leur portée apparaisse comme considérable.

A. BUHL (Toulouse).

Henri GALBRUN. — **Propagation d'une onde sonore dans l'Atmosphère et Théorie des Zones de silence.** — Un volume gr. in-8° de x-352 pages et 68 figures. Prix: 70 francs. Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>, Paris. 1931.

Nouvelle publication faite sous les auspices de l'Institut de Mécanique

des Fluides de l'Université de Paris (Fondation du Ministère de l'Air). Ce qui est également remarquable, c'est la personnalité de M. Henri Galbrun, bien connu comme actuaire, comme auteur de divers ouvrages de Science financière et qui cependant a écrit une Introduction à la Théorie de la Relativité. Les qualités de ce dernier travail se retrouvent maintenant dans l'étude des ondes sonores, étude dans laquelle on observe, à un haut degré, le jeu d'hypothèses analytiques simples et de formules, à symétries parfaites, inspirées du Calcul différentiel absolu.

L'origine des présentes recherches peut être rapportée à un travail, de M. Esclangon, sur *L'acoustique des canons et des projectiles*, né de la dernière guerre et où l'on étudie l'onde balistique provenant de la trajectoire de projectiles à vitesse supérieure à celle du son. Ceci ne va pas sans généralisations spéciales de certains chapitres de la théorie des ondes dans leurs rapports avec le Principe d'Huyghens, qui peut ne faire intervenir que des dérivées partielles du premier ordre, et avec les considérations beaucoup plus profondes de Riemann, Hugoniot et de M. J. Hadamard développées à partir d'équations propres à la Dynamique des fluides, équations qui sont, au moins, du second ordre. On peut même dire que toutes les théories ondulatoires tournent autour de l'établissement d'un tel accord qui ne va pas sans de certaines indéterminations dont tel ou tel auteur profitera de telle ou telle manière.

M. Galbrun reste très classique. Les discontinuités du second ordre sont toujours en contact étroit avec les caractéristiques de Cauchy. Les théories fluidiques en  $x, y, z, t$  sont géométrisées dans l'espace à quatre dimensions et c'est par une brillante analyse, appuyée sur la nullité d'un déterminant du cinquième ordre, que la notion de caractéristique est adjointe aux équations du mouvement d'un gaz dans l'hypothèse de l'adiabatisation.

Les choses apparaissent ensuite comme particulièrement maniables, sinon comme complètement déterminées, dans le cas des petits mouvements. La détermination s'améliorera dans la recherche de solutions périodiques qui auront l'avantage de prendre une physionomie nettement physique, c'est-à-dire une allure vibratoire et ondulatoire. L'indétermination des rayons sonores peut aussi expliquer les phénomènes complexes d'incurvation produits par diverses circonstances atmosphériques. Les congruences de rayons, dans leurs rapports avec les surfaces d'ondes, les tendances de ces surfaces à prendre des connexions multiples raccordées suivant des lignes singulières montrent le Principe d'Huyghens comme possédant, à son tour, une plasticité qui ne lui laisse pas toujours le rôle d'un véritable principe fondamental. D'ailleurs partout, dans le bel exposé de M. Galbrun, l'analyse semble primer le principe physique qui chez certains (de plus en plus rares dans la Science actuelle) est au contraire la chose primordiale prétexte à une analyse pour ainsi dire surajoutée. Ici, et nous croyons que c'est la bonne méthode, l'analyse et surtout l'étude des singularités analytiques, laissent ensuite, aux principes physiques un domaine moins essentiel mais où, du moins, ils sont devenus analytiquement utilisables dans des conditions parfaitement connues.

Cette impression se confirme dans la Seconde partie de l'ouvrage, consacrée aux zones de silence. Il s'agit surtout d'une géométrie. La source sonore est réduite à un point; les rayons sonores ont des enveloppes diverses, ils touchent des arêtes de rebroussement et finissent par engendrer des multiplicités de congruences qui, à elles seules, pourraient permettre une théorie

de zones d'audition et de zones silencieuses. Ce n'est peut-être pas le principal. La réflexion, en atmosphère hétérogène, sur les nuages, par exemple, doit intervenir de manière importante. Mais le fait de découvrir des phénomènes ayant même effet que la réflexion, en dehors de cette notion proprement dite, montre assez l'intérêt, l'inattendu qui peut sortir des équations de la mécanique des fluides dans cette voie des singularités ondulatoires qui, bien que très travaillée à l'heure actuelle, renferme encore tant et tant d'inconnu, d'insoupçonné, de paradoxal. Le livre de M. Henri Galbrun est vraisemblablement le travail qui prolonge de la manière la plus intéressante les *Leçons sur la propagation des ondes*, publiées par M. Hadamard en 1903. Il donne à ces *Leçons* une réalité particulièrement tangible qui ne cesse jamais d'être soutenue par une analyse mathématique aussi profonde qu'élégante.

A. BUHL (Toulouse).

Hermann WEYL. — **Gruppentheorie und Quantenmechanik.** Zweite umgearbeitete Auflage. — Un vol. grand in-8° de XII-366 pages. Prix: broché, RM. 24; relié, RM. 26. S. Hirzel, Leipzig. 1931.

Nous signalions, l'an dernier (p. 323), avec un certain retard, il est vrai, la première édition de ce magnifique ouvrage. Toutefois trois années seulement se sont écoulées entre les deux éditions et ceci suffit amplement à prouver l'attrait du sujet.

Naturellement l'idée principale est conservée; elle consiste surtout à construire avec des *opérateurs* déterminés dont les deux premiers types, en présence de  $n$  variables  $x_i$ , sont les *dérivations partielles* en  $x_i$  et les *multiplifications* par  $x_i$ . Les premiers opérateurs jouissent, *entre eux*, de la propriété de *commutativité*; les seconds sont dans le même cas. Mais cette commutativité disparaît, en général, dans les associations des deux espèces d'opérateurs; dans ces associations, on reconnaît aisément les symboles des transformations infinitésimales des groupes linéaires et voilà comment ces groupes s'associent aux théories fondées, par exemple, sur des équations aux dérivées partielles à coefficients constants ou sur une algèbre de déterminants, ces deux symbolismes, d'une extraordinaire importance, en engendrant d'autres, d'une portée plus grande encore, comme il arrive dans la théorie de Dirac.

La création géométrique par excellence est celle d'une géométrie unitaire où les formes à indéterminées conjuguées de Charles Hermite remplacent le carré de la distance pythagoricienne. L'idée est tout à fait analogue à celle qui remplace la géométrie euclidienne par la géométrie des espaces de Riemann et conduit à la Gravifique. Les buts atteints sont différents et plus particulièrement propres à l'analyse du microcosme atomique encore qu'il n'y ait pas, entre les deux choses, de différence absolument essentielle. La Gravifique, avec ses champs agissant sur les étalons, généralise l'idée de *mesure*; or cette dernière notion a besoin aussi de généralisation dans les domaines microcosmiques où il ne peut plus y avoir d'étalons continus, de règles divisées, ni même souvent de véritables évaluations numériques précises parce que la conception qui s'impose alors est celle d'*ensemble* et non plus celle de *nombre*. Peut être verra-t-on, de ce côté, la véritable clef des *incertitudes de Heisenberg* en lesquelles ne peuvent être établies, *à la fois*, de nettes individualités pour l'onde et pour le corpuscule. A propos de tels sujets, que de transformations dans la Science! Dès que l'on découvre

de telles et aussi fondamentales incertitudes — dont l'étude est encore, par ailleurs, un objet pour les théories probabilitaires — il n'y a plus lieu de croire qu'on est en présence de quelque théorie mal faite appelant des corrections qui remédieront à l'incertain. Non. Ce que l'on met à nu c'est l'insuffisance même du raisonnement humain, le mal fondé de cette soif de certitude dont la satisfaction, impossible heureusement, empêcherait de penser en des transformations de plus en plus grandioses et de plus en plus harmonieuses.

Tels sont les aperçus philosophiques que les deux éditions du livre de M. H. Weyl dégagent également bien. Dans la seconde il nous avertit qu'il a surtout songé à élémentariser le sujet. Il fait entendre par là qu'il a cherché à rapprocher les groupes les uns des autres, à nous faire comprendre, par exemple, que les groupes de la géométrie unitaire étaient des groupes linéaires extrêmement voisins des groupes de rotations, qu'il n'y avait aucune raison physique pour que l'Univers ne soit fait qu'avec des groupes de déplacements malgré l'apparence privilégiée de ceux-ci dans le domaine moyen et banal. Le savant auteur est vraiment un grand philosophe; sa morale est à la hauteur de sa logique. Il ne refuse même pas d'accueillir les sottises provenant d'adversaires à vues bornées. C'est ainsi qu'il qualifie simplement d'injuste une opinion récente qui souhaite de voir disparaître la « peste des groupes » de la physique quantique. Quel singulier état d'esprit que celui de certains hommes de science qui cherchent ainsi à discréditer ce qu'ils ne peuvent comprendre. Il ne faut pas se dissimuler non plus le caractère archi-faux de la croyance aux postulats qui, une fois choisis, et toujours en petit nombre, doivent permettre de tout atteindre. Un domaine nouveau ne relève pas, en général, de ce qui a été établi en d'autres. Les groupes, les ensembles nous forcent à revenir sur l'arithmétique et la géométrie de notre enfance; c'est rester enfant que de se refuser à cette revision au delà de laquelle apparaîtra la nécessité d'autres revisions encore, d'où la nécessité d'une plasticité d'esprit qui caractérisera de plus en plus le véritable tempérament scientifique.

M. Hermann Weyl vient de faire de nouveaux prodiges en faveur du développement de cette plasticité. A. BUHL (Toulouse).

Eugen WIGNER. — **Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren** (Die Wissenschaft. Einzeldarstellungen aus der Naturwissenschaft und der Technik. Band 85. Herausgegeben von Prof. Dr Wilhelm Westphal). — Un volume in-8° de VIII-332 pages. Prix: relié, RM. 29.60; broché, RM. 27.20. Friedr. Vieweg & Sohn, Akt.-Ges. in Braunschweig. 1931.

M. Hermann Weyl, on le voit, a des imitateurs et la « peste des groupes », dont il parle, semble assez joliment s'étendre. C'est une peste salutaire. M. Eugen Wigner, dans la Préface du présent livre, semble s'occuper quelque peu aussi des détracteurs de la Théorie des groupes ou tout au moins de ceux qui combattent l'introduction de cette Théorie en Physique. Et il dit des choses excellentes, concordant pleinement avec celles souvent dites et redites ici. Le caractère symétrique d'une théorie satisfait mieux le sentiment physique que beaucoup de procédés de calcul.

L'œuvre nouvelle est, avant tout, une œuvre d'initiation. En passant de sa première à sa seconde édition, M. Weyl a reconnu la nécessité d'élémenta-

riser un peu plus les choses. M. Wigner élémentarise encore davantage. Il commence par les vecteurs, les matrices, les transformations linéaires pour arriver aussi aux formes et matrices unitaires de Charles Hermite. Ceci permet d'aborder les fondements de la Mécanique quantique avec la forme énergétique quadratique dont les variables  $p$  et  $q$  sont seulement soumises à une propriété de multiplication non commutative où figure la constante de Planck. La comparaison de l'équation de Jacobi et du Principe d'Huyghens conduit à l'onde accompagnant le mouvement ponctuel et réciproquement; l'équation de Schrödinger suit sans peine. Vraiment, il n'y a plus là maintenant que des choses banales et semblant définitivement fixées. Les opérateurs et les intégrales multiples dominent, ces dernières pouvant avoir aisément une origine probabilitaire.

Les considérations abstraites sur les groupes sont rendues des plus intéressantes par un premier tableau de six matrices qui sont déduites des trois racines cubiques de l'unité. Tous les produits de ces matrices appartiennent au tableau. D'autres exemples suivent avec la notion de sous-groupe. Les notions intégrales reviennent avec l'intégrale de Hurwitz qui présente des propriétés opératoires très simplement dérivées des propriétés précédentes.

Les représentations *algébriques* des groupes les plus quelconques, tels les groupes de permutations, sont fouillées avec un art tout particulier.

Historiquement, ce sont d'abord des opérations algébriques qui ont été imitées avec des opérateurs de jeu infinitésimal, particulièrement avec des opérateurs de dérivation. On se préoccupe maintenant de retrouver, dans le domaine algébrique, des équivalents de toute coordination, de l'analytique, du continu et l'on y parvient admirablement avec ces variables matricielles qui ne sont que des quantités complexes, d'une nature spéciale, susceptibles d'être écrites en tableaux rectangulaires, quantités qui proviennent de la notion très élémentaire de substitution linéaire et qui, pour des tableaux à un seul élément, se réduisent aux quantités ordinaires.

Dès lors, les liaisons du discontinu et du continu sont rapides. Les ondes, de même qu'elles peuvent donner, à notre échelle, des spectres discontinus, s'accoutument à l'échelle intra-atomique, de phénomènes également discontinus qui ont seulement besoin d'une analyse de groupes plus complexe que celle des déplacements étudiés, par la mécanique ordinaire, à l'échelle vulgaire. N'insistons pas davantage sur le détail des questions. On trouvera dans l'ouvrage de quoi comprendre Heisenberg, Pauli, Dirac, Heitler, Hund, London et autres. La comparaison avec Weyl sera toujours instructive et féconde. Et comme la théorie des groupes, qui remonte à Galois et à Lie, a existé bien avant les explorations intra-atomiques, on pourra considérer, une fois de plus et non sans émerveillement, cet algorithme mathématique qui semble créer des instruments, en dehors de toutes préoccupations utilitaires, jusqu'au jour où ceux-ci rendent les plus éclatants services.

A. BUHL (Toulouse).

R. COURANT und D. HILBERT. — **Methoden der mathematischen Physik.** Erster Band. Zweite Auflage (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band XII). — Un vol. grand in-8° de XIV-470 pages. Prix: broché, RM. 29,20; relié, RM. 30,80. Julius Springer, Berlin. 1931.

Encore une seconde édition, obtenue en six ans. Décidément la Physique,

soit mathématique, soit théorique — car ce n'est pas la même chose — passe bien au premier rang des préoccupations scientifiques. L'essor de ces publications est même si grand, elles deviennent si nombreuses que le critique se trouve en présence de séries d'ouvrages pour lesquels il peut craindre de se répéter, au moins sur certains sujets, quand il passe d'un volume aux suivants.

Ainsi le Chapitre premier du livre de MM. Courant et Hilbert traite de l'Algèbre des transformations linéaires et des formes quadratiques. C'est le terrain de ce qui s'appelait, tout-à-l'heure, géométrie unitaire, avec M. H. Weyl. C'est l'algèbre des matrices, des formes quadratiques hermitiennes à réduire à des formes canoniques par un choix d'axes principaux, avec les notions immédiatement adjointes de nombres caractéristiques, de valeurs propres ou principales (Eigenwerte). L'exposé est ici très développé, très clair, aussi voisin que possible d'une algèbre plus élémentaire; on y trouve l'expression majorante approchée d'un déterminant d'après M. J. Hadamard et finalement la notion de *spectre* d'une matrice unitaire.

Le Chapitre II est consacré aux développements en série de fonctions arbitraires. C'est encore la marche classique des transformations unitaires à une infinité de variables. Mais c'est aussi l'espace fonctionnel bientôt substitué à l'espace géométrique; c'est le domaine hilbertien traité par M. Hilbert en personne. Il est inutile de souligner davantage l'originalité d'un tel exposé. La série de Fourier sert de point de départ élémentaire, non sans être en relation avec l'équation fonctionnelle relative à une fonction  $\theta$ ; elle donne les intégrales de Fourier. Viennent les polynômes de Legendre, ceux de Tschebyscheff en  $\cos(n \text{ arc } \cos x)$ , ceux de Ch. Hermite et de Laguerre. Puis c'est le procédé sommatoire de Fejér, la formule d'inversion de Mellin, le si curieux phénomène de Gibbs sur lequel nous avons déjà plusieurs fois insisté dans ces analyses bibliographiques.

Ensuite on passe, avec le Chapitre III, aux équations intégrales linéaires. Suivant l'ordre historique l'importance est d'abord du côté de Fredholm mais on examine promptement de nouveaux fondements de la théorie avec Schmidt et Volterra.

Les fondements du Calcul des variations constituent le Chapitre IV. L'origine des équations de la Physique dans ce calcul, si naturellement générateur d'équations différentielles et d'équations aux dérivées partielles, est, en effet, chose de première importance. Il équivaut, à bien des points de vue, au Calcul tensoriel. De plus, à côté de l'une des équations différentielles fondamentales de la question, l'équation d'Euler, il y a des considérations d'homogénéité et notamment le fameux et très élémentaire théorème d'Euler sur les variables  $x_i$ , les dérivées partielles en  $x_i$ , de  $f$ , et  $mf$ . C'est peut-être là la manière la plus simple d'associer des *variables opératrices* à des opérations de dérivation comme le fait M. Weyl en ayant recours à des considérations probabilitaires. L'exposé va jusqu'à la variation seconde, la condition de Legendre, les problèmes variationnels avec conditions aux limites et l'obtention générale de formes canoniques.

Le Chapitre V est consacré aux problèmes de vibrations et de valeurs propres. La première notion à fixer est celle des *opérateurs* différentiels ou intégraux à propriétés linéaires; c'est maintenant inéluctable, les opérateurs, entrant dans une association, ayant souvent plus d'importance que l'association même. Quant aux valeurs propres, leur rôle est particulièrement simple quand les solutions trigonométriques sont possibles; c'est de là qu'il



faut partir pour s'élever au phénomène quelconque qui, de ce fait, peut toujours conserver une certaine allure ondulatoire. Il peut, de même, avoir un *spectre* de valeurs propres continu ou discontinu. La *fonction de Green* est essentielle pour le passage des équations différentielles aux équations intégrales, passage qui codifie toutes les solutions en forme d'intégrales définies que beaucoup d'anciennes théories semblaient tenir d'un heureux hasard.

Le Chapitre VI applique le Calcul des variations aux problèmes précédents, ce qui est encore chose intuitive car, dans les cas très étendus où le calcul se ramène à la considération de systèmes d'équations canoniques, il a alors une structure formelle analogue à celle d'équations qui naissent de la transformation des intégrales multiples. Une telle constatation va de Liouville à Weyl.

Enfin le Chapitre VII traite des fonctions spéciales définies par les problèmes précédents. Bessel, Hankel, Neumann ont attaché leur nom à d'élégantes fonctions peu éloignées, en somme, de l'exponentielle et de ses formes trigonométriques, à condition d'une ample intervention de la fonction gamma employée comme agent de liaison. A Legendre et à Laplace nous devons surtout les fonctions sphériques. Tschebyscheff, Hermite, Laguerre firent des choses surprenantes, à partir d'équations linéaires, en employant les méthodes de Cauchy. Les fonctions harmoniques se révèlent tout aussi curieuses avec Maxwell et Sylvester. Et le volume se termine sur de jolies figures et d'élégantes formules. On aimerait continuer à parcourir un aussi attachant paysage. Heureusement tout ceci n'est qu'un premier tome et M. R. Courant, en terminant une courte préface, nous promet, pour bientôt, la suite de ce lumineux exposé. A. BUHL (Toulouse).

A. G. WEBSTER und G. SZEGÖ. — **Partielle Differenzialgleichungen der mathematischen Physik** (Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen). — Un vol. gr. in-8° de VIII-529 pages et 98 figures. Prix: relié, RM.28. B.-G. Teubner, Leipzig et Berlin. 1930.

Ceci n'est pas précisément une traduction mais plutôt une refonte, due au Prof. Dr Szegö, de l'ouvrage de A. G. Webster: *Partial differential Equations of Mathematical Physics* (Teubner, 1927). Le plan diffère nettement de celui du livre précédemment analysé dû à MM. Courant et Hilbert.

Le Chapitre premier est consacré à la formation, à l'énumération des principales équations de la Physique mathématique. Les méthodes sont vectorielles ou bénéficient de simplicités d'origine vectorielle. Il semble que des simplifications plus grandes encore auraient pu être obtenues par des méthodes tensorielles, les formules stokiennes de l'espace à quatre dimensions ayant un pouvoir de synthèse particulièrement remarquable et une génération en accord avec les premiers principes du Calcul intégral; c'est ainsi, par exemple, que les équations électromagnétiques de Maxwell ont une structure contenue, à l'état latent, dans le concept même d'intégrale triple. Faut-il ajouter qu'il n'y a là aucune critique; les auteurs pourraient d'ailleurs prétendre qu'ils ont songé plus à des constructions physiques tangibles qu'à des synthèses relevant de la géométrie de l'hyperespace cependant invoqué ici et dans la suite.

Le cachet original et moderne s'affirme, dès le Chapitre II, avec les équations

tions aux dérivées partielles du premier ordre. Ces équations sont définitivement incorporées à la Physique avec l'équation de Jacobi et offrent une discussion préliminaire du Problème de Cauchy qui (Ch. III) s'impose ensuite, au second ordre, avec les premières considérations d'ondes. Les valeurs et les fonctions propres se greffent ingénieusement sur celles-ci et l'aperçu qui se dégage ainsi, des trois premiers chapitres, constitue déjà un tout des plus suggestifs.

Il importe (Ch. IV) d'étudier la série et les intégrales de Fourier. Jolies figures d'approximation. Reprise de la notion d'onde par ondulations trigonométriques et méthodes d'intégration à la Cauchy par intégrales à structure exponentielle. On atteint ainsi la propagation des ondes dans l'espace à deux dimensions. Pour le cas de trois dimensions, une étude préalable de l'équation du potentiel (Ch. V) s'impose de toute évidence. C'est ici que l'on peut passer de la théorie potentielle à la théorie ondulatoire au moyen de potentiels retardés présentés sous différentes formes toutes propres à préparer une théorie générale des équations intégrales.

Le Chapitre VI a trait à la méthode d'intégration de Riemann-Volterra. En France, c'est aussi le terrain des recherches de MM. Emile Picard et J. Hadamard, terrain où nous rencontrons d'ailleurs quelques autres noms de valeur, tels ceux de Hugoniot et J. Coulon. C'est la méthode des caractéristiques avec son interprétation ondulatoire mais étendue jusqu'au cas de  $n$  variables. La cinématique de l'onde de choc, puis des ondes d'accélération, est soigneusement faite. La formule de Green à  $n$  variables joue un rôle fondamental.

Le Chapitre VII traite des fonctions sphériques, des fonctions de Bessel et de Lamé. L'homogénéité, sous la forme du théorème d'Euler, c'est-à-dire traduite par une équation aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients  $x_i$ , vient encore rappeler ici les idées de Weyl sur ces  $x_i$ , variables opératoires à associer naturellement aux opérateurs de dérivation. Un peu plus loin nous trouvons une représentation maxwellienne des fonctions sphériques déjà vue avec Courant et Hilbert. De tels contacts prouvent l'excellence des théories et des ouvrages qui les exposent. Quant aux fonctions de Bessel et de Lamé, leurs propriétés fonctionnelles, intégrales, différentielles sont amalgamées de façon parfaite.

Les applications des fonctions sphériques, ainsi que de l'élégante réduction constituée par les fonctions cylindriques, occupent le Chapitre VIII. L'attraction d'anneaux, de plaques circulaires, d'une surface sphérique, les vibrations de tels objets, une rapide esquisse relative aux marées, ... sont plus que suffisantes pour faire comprendre l'utilité des transcendentes précédemment introduites, transcendentes qui révèlent encore les plus remarquables propriétés mathématiques, telles un théorème d'addition de C. Neumann dans le cas des fonctions de Bessel. Ces dernières jouissent aussi d'un asymptotisme simple et toutes ces études éclairent la nature de nombreuses intégrales définies.

Le Chapitre IX est consacré aux équations intégrales. On reconnaît sans peine les séries de Fredholm dont les termes sont des intégrales de plus en plus multiples portant sur des déterminants dont l'ordre est de plus en plus élevé. Les idées terminales sont celles de Hilbert.

Ce bel ouvrage est complété par un appendice qui joue plutôt un rôle élémentaire et pourrait servir d'introduction. On y trouve les déterminants fonctionnels, les interversions de limites, la convergence uniforme, encore

de belles intégrales définies, les équations linéaires dans le domaine complexe.

J'insisterai encore sur les déterminants fonctionnels et leurs transformations immédiates les déterminants symboliques formés d'opérateurs de dérivations; l'avenir des théories constructives d'équations aux dérivées partielles semble être là. Mais combien ce proche avenir est heureusement préparé par une aussi grandiose exposition que celle de MM. Webster et Szegö.

A. BUHL (Toulouse).

Philipp FRANK und Richard V. MISES. — **Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik.** Band I. Mathematischer Teil. Zweite vermehrte Auflage. — Un vol. grand in-8° de xxiii-916 pages et 84 figures. Prix: broché, RM. 57; relié, RM. 62. Friedr. Vieweg und Sohn. Braunschweig. 1930.

Cette Partie mathématique publiée par le Dr Richard v. Mises, appartient à une série d'éditions d'histoire glorieuse. Ce serait le commencement de la huitième réimpression du célèbre ouvrage de Riemann-Weber sur les Equations aux dérivées partielles de la Physique mathématique. Aujourd'hui les collaborateurs sont nombreux et se sont habilement divisé le travail, ce qui éloigne toute crainte de faiblesses partielles en un exposé dont le premier volume possède déjà presque un millier de pages. Indiquons cette division par une simple énumération des Chapitres.

I. *Fonctions réelles.* G. Szegö (Königsberg). — II. *Formes linéaires.* Ph. Frank (Prague) et R. v. Mises (Berlin). — III. *Variables complexes.* K. Löwner (Prague). — IV. *Séries et produits infinis.* G. Szegö. — V. *Calcul des Variations.* C. Carathéodory (Munich). — VI. *Conditions initiales.* L. Bieberbach (Berlin). — VII. *Problèmes aux limites. Second ordre.* L. Bieberbach und R. v. Mises. — VIII. *Fonctions particulières naissant des problèmes aux limites du second ordre.* G. Szegö. — IX. *Séries qui naissent de problèmes aux limites.* G. Szegö. — X. *Problèmes aux limites particuliers.* L. Bieberbach und R. v. Mises. — XI. *Equations intégrales.* R. v. Mises. — XII. *Résolution des équations intégrales.* R. v. Mises und G. Schulz (Berlin). — XIII. *Application aux Problèmes aux limites.* R. v. Mises. — XIV. *Potentiel.* R. v. Mises. — XV. *Equations aux dérivées partielles. Conditions initiales.* H. Rademacher (Breslau) et R. Iglisch (Berlin). — XVI. *L'équation du potentiel dans le plan.* K. Löwner. — XVII. *L'équation du potentiel dans l'espace.* G. Szegö. — XVIII. *Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du second ordre.* H. Rademacher und R. Iglisch. — XIX. *Quelques problèmes particuliers sur les équations aux dérivées partielles.* H. Rademacher und E. Rothe (Breslau). — XX. *Calcul des Variations et Problèmes aux limites.* R. Courant (Göttingue).

Les noms seuls qu'on trouve — ou qu'on retrouve — dans cette liste, montrent, à nouveau, la difficulté d'une analyse quelque peu originale. Evidemment la science physico-mathématique s'impose de toutes parts. Il n'y a rien de trop beau, de trop parfait en mathématiques pour les études phénoménales et ce sont réciproquement des phénomènes de mieux en mieux observés — surtout à des échelles très différentes — qui conduisent à de nouvelles créations mathématiques.

Les cinq premiers Chapitres du volume forment une section initiale intitulée d'ailleurs: Procédés généraux. Nous ne pouvons signaler, bien à

regret, une foule de développements clairs et ingénieux. Le Chapitre V fixe particulièrement l'attention avec un Calcul des variations rapproché constamment des formes canoniques, contenant les équations de Jacobi-Hamilton, les changements de variables canoniques et nombre d'indications sur les nouvelles méthodes de la Mécanique céleste d'après Henri Poincaré. L'auteur — et quel auteur que M. Carathéodory ! — nous fait voir, de haut, les dualités de la Mécanique céleste et de la Physique mathématique.

Une seconde section, qui comprend cinq Chapitres (de VI à X inclus), est consacrée aux équations différentielles ordinaires. En VI, on commence par un examen général concernant l'existence des intégrales et ce par un bref emploi de la méthode des approximations successives; les cas élémentaires d'intégration explicite suivent promptement. Les conditions aux limites (VII), les valeurs propres, les fonctions orthogonales et la fonction de Green nées, dans l'ordre historique, à propos d'équations aux dérivées partielles, trouvent ici leur place dans l'ordre logique. En VIII, après la notion d'espace fonctionnel, on fait naître, des considérations du Chapitre précédent, les fonctions sphériques, celles de Bessel, de Hankel, ... et la riche kyrielle des polynômes de Jacobi, Laguerre, Hermite,...; en IX, ces éléments engendrent toutes les séries construites à l'instar des séries trigonométriques.

La troisième section (Chapitres XI à XIV) traite des équations intégrales et du potentiel. Elle commence par l'étude d'un curieux schème optique auquel correspond la constitution analytique d'une équation intégrale pour laquelle se pose immédiatement un problème d'inversion. La résolution générale est celle de Fredholm-Hilbert (XII) suivie de l'emploi de la série de Neumann et des procédés de Goursat et Schmidt. En XIII, nous retrouvons la fonction de Green pour le cas de deux variables. Ce n'est qu'en XIV qu'intervient le potentiel proprement dit avec ses différentes modalités physiques puis les modalités, beaucoup plus mathématiques, des problèmes de Dirichlet et de Neumann.

Enfin, la quatrième et dernière section traite des équations aux dérivées partielles en commençant par le cas linéaire du premier ordre puis par les équations quelconques en  $x, y, z, p, q$ . Quelques mots sur les méthodes de Lie, de Monge, l'intégrale complète, les caractéristiques annoncent bien des choses à retrouver ensuite dans le domaine des équations du second ordre. Retour sur les systèmes canoniques et les propriétés hamiltoniennes. Transformation de contact. L'équation de Laplace à deux variables (XVI) fait reprendre le problème de Dirichlet correspondant et conduit aux généralités de la représentation conforme. Dans l'espace (XVII) on va jusqu'aux fonctions de Mathieu et de Lamé et au théorème d'existence de Poincaré. En XVIII, la méthode classique de Riemann est suivie d'autres, moins connues, telles la méthode de Heaviside qui ne s'applique qu'à des équations à coefficients constants mais à l'aide d'opérateurs à jeu particulièrement simple. En XIX la transcendance s'accroît avec des équations telles que  $\log \Delta u = u$  ou  $\Delta \Delta u = 0$ . Enfin, en XX, le Calcul des variations reprend des droits fondamentaux avec, par exemple, le Principe d'Hamilton et sa prodigieuse puissance de synthèse.

Quant à l'impression synthétique globale que donne l'œuvre, elle est, répétons-le, d'une merveilleuse homogénéité. Les différents auteurs se sont-ils merveilleusement entendus? Est-ce la Science qui est, par nature, merveilleusement homogène? Le mieux est d'admettre qu'il peut y avoir là

quelque remarquable dualité dont des savants de premier ordre ont adroitement tiré le meilleur des partis.

A. BUHL (Toulouse).

Gerhard KOWALEWSKI. — **Integralgleichungen** (Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe, Reine und angewandte Mathematik. Band 18). — Un vol. grand in-8° de 302 pages et 11 figures. Prix: broché, RM. 15; relié, RM. 16,50. Walter de Gruyter & Co. Berlin W 10 et Leipzig. 1930.

Bien que cet ouvrage soit surtout mathématique, il prend évidemment place près de ceux relevant de la Physique mathématique. Il est dédié à Edouard Study ou, plus exactement, à la mémoire de cet éminent géomètre auquel *L'Enseignement Mathématique* a consacré récemment un Eloge (1930).

Il s'agit d'une Introduction et de quatre Chapitres rédigés avec une grande cohésion. L'introduction et le premier Chapitre révèlent tout de suite l'idée fondamentale d'*opérateur*. A propos de l'équation d'Abel, de celles que donnent, par exemple, les intégrales de Fresnel et de Fourier, la série de Taylor pourvue d'une forme intégrale du reste,..., le point de vue fonctionnel est d'abord mis en évidence. On se trouve en présence d'opérateurs de nature intégrale et l'on se propose de les étudier. Alors les procédés d'inversion ne tardent pas à apparaître encadrés par une analyse aussi élégante que naturelle. C'est, sans doute, dans cet ordre d'idées que l'auteur voit en M. Volterra le véritable créateur de la théorie. Fredholm est loin d'être oublié mais sa méthode relève plutôt du brillant artifice que d'une comparaison minutieuse avec le système linéaire à  $n$  inconnues qui ne donne jamais, à la résolution que des formules linéaires et qui conserve ce caractère d'inversion quand  $n$  croît indéfiniment. Notons aussi que certaines équations de Volterra (de première espèce) se rattachent immédiatement à la théorie des matrices, donc des groupes linéaires, et que ceci nous ramène aux conceptions si bien utilisées par M. Weyl en Mécanique quantique. Quant à montrer que les opérateurs intégraux, des domaines précédents, s'allient avec des opérateurs différentiels constituant des équations différentielles, c'est encore une dualité qui se présente d'elle-même à l'esprit quand les deux classes d'opérateurs sont tant soit peu étudiées de manière convenable.

Le Chapitre II est consacré aux équations du type de Fredholm et tient, à lui seul, plus de la moitié du volume, ce qui prouve bien, encore une fois, que Fredholm n'est diminué en rien. Ses équations intégrales se distinguent de celles de Volterra par une simple limite d'intervalle d'intégration variable chez Volterra, constante chez Fredholm. Contrairement à ce que l'on pourrait croire, au premier abord, le second cas est plus épineux que le premier encore qu'il y ait aussi des opérateurs intégraux à la Fredholm avec lesquels les solutions *formelles* s'obtiennent fort esthétiquement. Seulement il faut prouver ensuite la convergence des opérations. Une seconde méthode suit de près l'introduction de déterminants dont l'ordre s'élève indéfiniment; l'aboutissement limite est alors justifié *ipso facto*. Mais le sujet est incroyablement riche, les cas d'espèces qui peuvent éclairer le cas général sont nombreux, maintes théories sont englobées ou utilisées, telles celle des « Elementarteiler » qui n'est, au fond, que l'étude d'une correspondance, entre formes fonctionnelles linéaires, avec réductions, de celles-ci, à des formes canoniques. Il est malaisé de préciser davantage alors qu'on est en présence de formules qui débordent souvent sur les marges

du livre; toutefois les idées simples n'en sont pas moins faciles à dégager.

Le Chapitre III traite des noyaux symétriques. On se dirige encore vers bien des choses, notamment vers des extensions de l'analyse des formes quadratiques et vers les représentations factorielles des fonctions entières, ce dernier point relevant des questions paramétriques.

Enfin le Chapitre IV se rapporte à quelques applications telles les vibrations transversales des cordes et le problème aux limites relatif aux fonctions harmoniques. Il vaut mieux que celui-ci soit bref. On cherche des applications dans les ouvrages consacrés à la Physique; il ne faut admirer ici qu'une trame mathématique fondamentale très élégamment isolée en une étude propre.

A. BUHL (Toulouse).

Gerhard KOWALEWSKI. — **Vorlesungen über allgemeine natürliche Geometrie und Liesche Transformationsgruppen** (Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe, Reine und angewandte Mathematik. Band 19). — Un vol. grand in-8° de 280 pages et 16 figures. Prix: broché, RM. 15,50; relié, RM. 17. Walter de Gruyter & Co. Berlin W 10 et Leipzig. 1931.

Ce livre, dû au même auteur que le précédent, n'obéit certes pas à des préoccupations moins élégantes. Il est dédié à Georg Pick présenté comme fondateur de la Géométrie naturelle. Cette dédicace peut occasionner un léger sursaut. Ne va-t-on pas oublier Cesàro ? Mais les premières pages sont pleinement rassurantes. L'œuvre de Cesàro est admirablement mise en lumière et sert de point de départ pour toutes généralisations. Cesàro prématurément disparu, dans un atroce accident de bains de mer qui coûta également la vie à l'un de ses fils (voir *L'Enseignement mathématique* t. VIII, 1906, p. 485 et, avec portrait de Cesàro, t. IX, 1907, p. 5), était loin d'avoir fourni sa mesure; il devait avoir des disciples et un volume comme celui d'aujourd'hui constitue forcément un monument élevé à son souvenir.

La Géométrie naturelle de Cesàro commence par celle des courbes planes définies en coordonnées intrinsèques  $\rho$  et  $s$  ( $\rho$  rayon de courbure,  $s$  arc). Or il se trouve que les courbes qui sont ainsi le plus simplement définies (cercle, droite, spirale logarithmique, chaînette, épicycloïdes, clothoïde, courbes de Ribaucour, développées et développantes diverses, etc., etc...) sont particulièrement riches en propriétés cinématiques; c'est dire qu'elles sont en relation particulièrement remarquable avec le *groupe des déplacements*. D'autre part Cesàro aimait l'image du petit bateau parcourant ces courbes, assimilées à d'étroits cours d'eau, et portant un observateur qui, dans cet état de mouvement, devait juger de la géométrie de la courbe et de celle du paysage. On dirait aujourd'hui que cet observateur fait de la géométrie relativiste. On pressent déjà quelles ouvertures peuvent naître d'un point de départ qui, à coup sûr, était d'une excessive simplicité ! Telles sont les premières idées à dégager du Chapitre I du présent exposé.

Le Chapitre II étend les précédentes considérations aux courbes gauches libres ou tracées sur des surfaces. Le petit bateau est remplacé par un insecte qui grimpe le long de ces lignes. On a ainsi une géométrie spatiale, avec courbure et torsion, précieuse notamment quant à l'étude des hélices et à nombre de généralisations considérées par Gaston Darboux.

Au Chapitre III, on commence à voir comment Georg Pick généralisa Cesàro en se dirigeant même vers les idées de M. Elie Cartan, d'après

lesquelles la véritable géométrie d'un groupe est plutôt dans le jeu des paramètres qu'il contient que dans celui des variables transformées. Il s'agit de *prolonger* un groupe, à  $r$  paramètres, de manière à ce que ceux-ci et, en somme, toute la géométrie du groupe ne puissent plus dépendre que de paramètres essentiels  $e$  et  $e'$ . Si ces derniers sont précisément en nombre deux, la géométrie du groupe est analogue à celle d'une variété à deux dimensions. Les opérations de prolongement ont introduit, en celle-ci, des expressions différentielles comparables à la courbure ou à la torsion. On étudie bien *intrinséquement* le pouvoir transformateur du groupe indépendamment de tel ou tel assemblage d'éléments transformés. Il est extrêmement curieux de constater que cette géométrie intrinsèque, de Cesàro, Pick et Cartan, contient des développements fort analogues à ceux de la géométrie cinématique. Elle contient des *roulettes*, des *clothoïdes* attachés à la fonction gamma comme la clothoïde ordinaire est attachée aux intégrales de Fresnel; son analyse est naturellement plus élevée et exige souvent des fonctions elliptiques là où la question correspondante de géométrie ordinaire s'accomode de fonctions élémentaires.

Un quatrième Chapitre nous montre que ces si curieuses considérations peuvent s'étendre à l'espace à trois dimensions. C'était à prévoir. Elles s'étendent même aux hyperespaces. A signaler particulièrement ici la théorie des « Soma » liée au nom de Study; ce sont des configurations de droites et de plans déterminables par des constantes en nombre fixé.

Le cinquième et dernier Chapitre arrive aux considérations générales de la Théorie des groupes, notamment quant à la détermination de toutes espèces d'invariants différentiels. Il s'agit, on le voit, d'un nouvel esprit de pénétration géométrique en cette Théorie des groupes jugée parfois abstruse par des mathématiciens qui ne manquent cependant ni de valeur ni de finesse d'esprit. Désormais la valeur et la finesse d'esprit ne pourront manquer d'apprécier des exposés tels que celui de M. Gerhard Kowalewski.

A. BUHL (Toulouse).

KUPT REIDEMESTER. — **Vorlesungen über Grundlagen der Geometrie** (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band XXXII). — Un volume grand in-8° de x-147 pages et 37 figures. Prix: broché, RM.11, relié, RM. 12,60. Julius Springer, Berlin. 1930.

Ce volume pourrait être logiquement placé avec ceux qui, plus haut, s'occupent de Topologie. On y remarque encore que la Géométrie traduit toujours des propositions d'Analyse alors que l'inverse n'est pas vrai. Le présent exposé se propose de discriminer, en les généralités analytiques, ce qui contribue effectivement, à la constitution de la Géométrie, notamment de la géométrie euclidienne. Les idées du fameux programme d'Erlangen, de Félix Klein, sont entièrement respectées. Au concept de construction analytique s'ajoute celui de construction axiomatique. L'idée de groupe est fondamentale et, au point de vue logique, on retrouve promptement des notions, telles celles de coordonnées *naturelles*, qui semblent être les mêmes que celles déjà décrites, à propos de l'ouvrage précédent de M. Gerhard Kowalewski; mais ici on ne recherche plus l'image ni même le calcul. Le lecteur doit être accessible aux pensées abstraites (für abstrakte Gedanken zugänglich sein) comme il est dit à la fin de la Préface.

L'une des premières choses à faire est d'examiner les fondements de

l'Algèbre, les opérations d'addition et de multiplication, les propriétés fondamentales d'associativité, de distributivité, de commutativité; de là naissent les *corps* et particulièrement les *corps gauches* où la commutativité est en défaut. Viennent ensuite les corps et les groupes *ordonnés* parmi lesquels se rangent les nombres réels. Les quaternions forment un corps gauche. L'axiome d'Archimède joue évidemment un grand rôle dans les questions d'ordination.

Avec les transformations affines nous marchons vers la géométrie projective et les dépendances linéaires de l'espace vectoriel.

Quant à l'axiomatique, notamment quant au *choix* des axiomes, les considérations précédentes se restreignent soit pour prendre une valeur constructive, spéciale dans le domaine logique, soit, plus simplement, pour satisfaire à l'empirisme. Il importe notamment de définir des conditions d'égalité. C'est seulement ici que les figures commencent à apparaître dans le livre et cette seule remarque en dit long sur le rôle du schème tracé par rapport à l'enchaînement de propositions qui lui permet enfin d'exister. Dès que l'on se permet de tracer, on conçoit rapidement des réseaux, des configurations et de véritables lemmes d'existence tels ceux de Desargues et de Pascal. Il faut admirer ces géomètres, tout d'ailleurs comme on doit admirer Euclide, d'avoir jadis ordonné la Géométrie d'une manière qui, en somme, n'est pas troublée par la logique moderne. Et cependant cette logique n'est pas superflue puisqu'elle situe la Géométrie parmi les prodigieux développements de l'Analyse.

A. BUHL (Toulouse).

René GARNIER. — **Cours de Mathématiques générales.** Tome II. Calcul intégral. — Un vol. grand in-8° de vi-396 pages et 275 figures. Prix: 80 francs. Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>, Paris. 1931.

Nous avons analysé le tome premier de cet excellent ouvrage dans le précédent volume de cette Revue (p. 188) et nous n'avons vraiment qu'à confirmer l'impression donnée alors.

Ici la notion d'aire prime la notion d'intégrale; c'est le point de vue pratique, prodigieusement fécond lorsqu'on sait s'en servir. Toujours au même point de vue géométrique, l'intégrale est comparée avec les séries à termes positifs et avec les séries alternées. Les procédés d'intégration sont riches en exemples; les fractions rationnelles ont des *pôles*, ce qui prépare aux généralisations de la Théorie des fonctions. Les intégrales rationnellement construites sur des courbes paramétriquement rationnelles sont des cas particuliers des intégrales *abéliennes*. Il y a un bénéfice immense à prévenir ainsi le néophyte qui, si on ne le met en présence que d'intégrales explicites élémentaires, a une tendance invincible à chercher d'impossibles généralisations immédiates de tels cas. Les fonctions hyperboliques sont utilisées comme les fonctions circulaires.

Pour les intégrales multiples, même et large usage de considérations géométriques; de nombreuses figures en font foi. Les applications aux aires, aux volumes, à la géométrie des masses sont extrêmement variées. La formule  $I = I_0 + Md^2$ , de la théorie des moments d'inertie, conduit à un théorème de Leibnitz comprenant le théorème de la médiane du triangle et celui de Stewart.

Les intégrales curvilignes, les intégrales de différentielles totales sont illustrées par des développements thermodynamiques avec les notions



d'énergie interne et d'entropie. Pour les intégrales de surfaces, avec intégrales simples ou triples correspondantes, formules de Stokes et de Green, les considérations vectorielles sont utilisées. Il me semble toujours un peu étonnant qu'on ne fasse pas plus de géométrie et d'usages extensifs de ces formules vers les théories électromagnétiques et ce en leur laissant le caractère *d'identités*. Elles sont, en effet, toujours comparables à des égalités telles que

$$\int_C X dY = \int_A dX dY,$$

lesquelles ont aussi bien lieu avec des intégrales d'ordre de multiplicité plus élevé. L'*a*, *b*, *c* de toute préparation à la Physique devrait aller, il me semble, jusqu'à l'établissement *formel* des équations de Maxwell. Peut-être faudrait-il, pour cela, parler un peu, mais combien peu, d'espace à quatre dimensions. Toutefois celui-ci pourrait s'appeler *espace-temps* et ce serait encore de l'élémentaire et du tangible. Je m'excuse de cette remarque, analogue à celle faite, plus haut, à propos de l'ouvrage Webster-Szegö, et qui, même si elle était prise en considération, ne modifierait que très peu, et sans allongement, le bel exposé de M. Garnier.

A propos des équations différentielles, le talent de l'auteur se donne libre carrière. Faut-il rappeler, en effet, que M. René Garnier est un spécialiste en la matière et qu'il est de ceux qui ont prolongé les travaux, déjà magnifiques, de M. Paul Painlevé. Même dans le domaine des premiers principes, ce sont là choses qui se reconnaissent tout de suite. Pour une équation quelconque,  $y' = f(x, y)$ , le plan est parsemé de minuscules vecteurs qui, en  $(x, y)$ , ont la pente  $f(x, y)$ . Les courbes intégrales naissent, pour ainsi dire, toutes seules, dans ce milieu de points orientés où, à partir d'un point quelconque, tout chemin est sans cesse dirigé. Si les vecteurs étaient figurés en relief, un aveugle, au toucher, comprendrait, aussi bien qu'un voyant, ce que sont les courbes intégrales. Mêmes procédés, dans l'espace, au début de l'étude des équations aux dérivées partielles. Nous nous permettons de passer sur les développements élémentaires concernant les équations à intégration explicite. La Physique reprend tous ses droits, vers la fin du volume, avec l'équation des cordes vibrantes, les solutions par fonctions arbitraires et les solutions par séries trigonométriques. Certaines de ces séries ont des coefficients paramétriquement rationnels dont l'ensemble conduit à la représentation d'une fonction méromorphe, telle  $\pi \cot \alpha \pi$ ; de là, aisément, le développement du sinus en produit infini.

Six Notes terminent et complètent élégamment l'ouvrage. Signalons surtout la seconde, *Sur les systèmes de vecteurs glissants*, et la cinquième *Sur certaines intégrales indéfinies*. Cette dernière évitera beaucoup de calculs maladroits.

Concluons en rappelant ce que nous disions l'an dernier lors de la publication du tome précédent. Les continuateurs de Paul Appell, apportent dans l'exécution de leur tâche, quelque élémentaire qu'elle soit, divers reflets de leur talent propre, d'où un cachet, généralement très personnel imprimé aux Cours de Mathématiques générales et mettant ceux-ci d'accord avec les meilleures traditions d'originalité propres à l'Enseignement supérieur.

S. CARRUS. — **Cours de Calcul différentiel et intégral.** Méthode de formation au raisonnement mathématique. Livre I. Calcul différentiel. Calcul intégral. Intégrales simples et multiples. — Un volume gr. in-8° de VIII-606 pages. Prix: 100 francs. Librairie de l'Enseignement technique Léon Eyrolles. Paris, 1931.

Disons tout de suite que ce *Cours* met en évidence une nouveauté pédagogique correspondant à une « Méthode de formation au raisonnement mathématique ».

L'auteur introduit, dans son texte, entre les lignes, des symboles représentés par des lettres grecques, dont chacun constitue un appel à l'esprit, une invitation à deviner, à construire le chaînon de raisonnement qui va suivre. Exemple:  $\alpha$  Qu'allons-nous faire.  $\delta$  Faites la démonstration. Appliquez la méthode.  $\nu$  Qu'est-il naturel de dire, de faire, de se demander.  $\pi$  Pourquoi?  $\rho$  Que remarquez-vous, que pouvez-vous dire.  $\sigma$  Que signifie cette relation, cette formule.  $\xi$  Que faut-il considérer, démontrer.  $\zeta$  Que faut-il supposer.  $\varphi$  Que suffit-il de se demander, de faire.  $\psi$  Que pensez-vous que l'on ait, que l'on doive avoir.  $\omega$  Concluez.

Ces questions, et quelques autres, sont imprimées sur un carton que l'on peut mettre à côté du livre, lorsqu'on étudie celui-ci, et qui lui est relié par un cordon, sans doute pour éviter une perte.

Voilà un procédé d'exercice fort original et qui mérite, au premier chef, d'être signalé dans *L'Enseignement mathématique*. L'auteur a tout l'air de vouloir l'expérimenter en grand car il adjoint aussi, à son volume, un papillon, de papier rouge, invitant Collègues et Elèves à lui communiquer le fruit de leurs efforts et de leurs réflexions. Instinctivement, j'ai essayé de la méthode. Elle joue souvent comme le désire l'auteur. Parfois cependant l'incitation développe un tumulte d'idées et de comparaisons dont on ne peut dire s'il est salubre ou non mais les cas indéniablement utiles sont en forte majorité. On peut imaginer aussi qu'un symbole, mal utilisé lors d'une première lecture, le soit fort bien dans une seconde.

Quant à l'exposition même du Calcul infinitésimal, M. Carrus a fait preuve de beaucoup de conscience. Il y a non seulement rigueur mais exposition de cas dangereux montrant le caractère indispensable de cette rigueur. Ainsi, pour une série double, on ne peut, sans explication, considérer comme équivalentes les sommations faites lignes par lignes et colonnes par colonnes. Or nous avons ici (p. 161) un exemple, de Arndt, où les deux sommations donnent manifestement des résultats différents. Les maxima et les minima sont très fouillés, la rigueur n'excluant pas l'intuition qui donne notamment une jolie solution quant aux maxima de l'aire d'un triangle dont les sommets décrivent des courbes données (p. 261).

Les intégrales de constitution singulière conduisent forcément à des exposés pointilleux mais nous trouvons, tout à côté, une foule d'intégrales élégantes, à propriétés exactes, qui font aimer cette branche de l'Analyse comme Hermite voulait qu'on l'aime.

Les intégrales multiples et leurs transformations terminent ce livre original, non sans beaucoup d'appels aux figures qui se voient dans le plan et dans l'espace. L'ensemble est extrêmement complet et réunit, à peu près, les Mathématiques générales et l'Analyse, du moins pour ce qu'il y a de Mathématiques générales en rapport avec l'Analyse ici traitée. Comment pourrait-il en être autrement dans une exposition qui incite, à chaque

alinéa, à revenir sur des préliminaires et des choses antérieurement acquises. Conformément au symbolisme ci-dessus résumé:  $\omega$ .

A. BUHL (Toulouse).

W. WILKOSZ. — **Les Propriétés topologiques du plan euclidien.** (Mémorial des Sciences mathématiques, dirigé par Henri Villat; fasc. XLV.) — Un fascicule gr. in-8° de 64 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>. Paris, 1931.

La topologie est décidément à l'ordre du jour. Après les grands ouvrages, analysés plus haut, de MM. Lefschetz et Veblen, voici un fascicule qui, s'il est d'apparence plus modeste, n'en est pas moins d'une très grande importance. La seule richesse de la bibliographie peut être un sujet d'étonnement. Après la citation de neuf ouvrages dus à Hausdorff, de Kérékjártó, Schœnflies, Weyl, Zoretti-Rosenthal, W.-H. et Grace Chisholm Young, Caratheodory, Wilkosz, Zaremba, on trouve l'indication de 131 Mémoires signés de noms incontestablement très brillants tels ceux de P. Aleksandroff, Baire, Borel, Brouwer, Cantor, Fréchet, Janizewski, Poincaré, Sierpinski, Urysohn. On remarque, tout de suite, qu'ici, le point de vue topologique n'est pas absolument le même que dans les livres de MM. Lefschetz et Veblen; chez ces auteurs, on sent toujours, malgré le point de vue géométrique nettement dégagé, qu'il s'agit d'*Analysis situs* provenant de l'Analyse. Au contraire, M. Wilkosz appartient à une école qui veut faire une topologie de nature exclusivement géométrique, profitant de la théorie des ensembles et de la Logique mathématique. Le bien-fondé de ce désir est indéniable. Il est entendu que les ensembles sont nés historiquement de la nécessité d'élucider l'Analyse mais il serait bien extraordinaire que la notion ne puisse s'appliquer aux êtres géométriques, points et courbes pour commencer. On voit alors avec quel art les notions banales, mais pleines de difficultés cachées, de continuité et de courbe ordinaire peuvent être disséquées et provenir de concepts beaucoup plus généraux. Le *point d'accumulation* dans le voisinage duquel se pressent une infinité d'autres points peut bien devenir un point ordinaire avec tangente déterminée mais ce n'est là qu'une configuration extrêmement particulière parmi beaucoup d'autres qui s'imposent *aussi facilement et aussi naturellement* dans une idée de dérivation géométrique dont la généralité ne fait qu'apporter de la clarté. Aux 140 citations de l'auteur on pourrait encore joindre celles de travaux dus à MM. G. Bouligand, G. Durand, G. Rabaté, géomètres qui, avec le concept de Géométrie infinitésimale directe, montrent actuellement qu'il existe aussi une Ecole française très occupée de Géométrie logique et de Topologie.

A. BUHL (Toulouse).

J. HAAG. — **Le Problème de Schwarzschild.** (Mémorial des Sciences mathématiques, dirigé par Henri Villat; fasc. XLVI.) — Un fascicule gr. in-8° de 53 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>. Paris, 1931.

M. Haag, dans ce fascicule, se défend de tout enthousiasme extramathématique. Heureusement, il apporte au sujet une contribution assez belle pour capter l'intérêt. Il est certain aussi qu'on n'est jamais complètement riemannien ou einsteinien, au point de vue expérimental. On ne juge d'un effet Einstein qu'au travers de compromis euclidiens et l'effet peut

n'être senti que confusément; pourtant, quel est l'astronome qui croit encore aujourd'hui à la loi de Newton considérée comme loi rigoureuse devant tout coordonner? Il serait invraisemblable qu'il n'y ait pas eu un progrès le jour où l'on s'est aperçu qu'un  $ds^2$ , de la forme  $g_{ij} dx_i dx_j$ , pouvait supporter toute une Physique. Que celle-ci ne soit pas la Physique naturelle, c'est certain; Riemann, pas plus qu'Euclide, n'a créé l'Univers et celui-ci, suivant Meyerson, ignore assez notre rationalisme. N'empêche que nous aurons toujours des constructions rationalistes, de structures ou d'intérêts différents, et qu'il sera toujours naturel de s'enthousiasmer pour les plus belles.

Pour en venir à un examen plus objectif de l'œuvre de M. Haag, disons qu'elle s'accorde fort bien avec le fascicule XLIII du *Mémorial*, dû à M. Th. De Donder et traitant des *Applications de la Gravifique*. Il y a également une analogie étroite avec l'exposé, fait à l'Ecole Polytechnique, par MM. Painlevé et Platrier, en un *Cours de Mécanique* analysé, ici-même, dans notre précédent volume (p. 357). C'est Eddington qui ne cesse de faire les premiers frais.

L'analyse prend un cachet original pour le  $ds^2$  intérieur à une sphère quand la densité et les efforts obéissent simplement à la symétrie sphérique. Jolies discussions avec *sphère catastrophique*. Les propriétés du champ de gravitation remettent en cause la notion même de rayon vecteur, la définition de  $\pi$ , le temps solaire propre et les questions unitaires.

Le périhélie de Mercure, la déviation de la lumière stellaire dans le voisinage du Soleil, sont suivis d'un chapitre sur les univers courbes, avec la conception de l'antisoleil, et d'un autre, sur la sphère électrisée, contenant notamment l'électron de Poincaré. C'est sans doute à la suite de quelque gageure que M. Haag prétend nous mener froidement dans ces mondes féeriques. Faut-il aussi le renvoyer à la phrase de Fontenelle, reproduite plus haut à propos des *Eloges et Discours* de M. Emile Picard, phrase d'après laquelle la façon de découvrir vaut mieux que la plupart des choses qu'on découvre.

A. BUHL (Toulouse).

G. TZITZÉICA. — **Introduction à la Géométrie différentielle projective des Courbes.** (Mémorial des Sciences mathématiques, dirigé par Henri Villat; fasc. XLVII.) — Un fascicule gr. in-8° de 62 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>. Paris, 1931.

Comme le reconnaît l'éminent Professeur, de l'Université de Bucarest, qui publie ce fascicule, celui-ci ne manque point d'analogie avec celui dû à C. Guichard, rédigé par M. R. Jacques sur *Les courbes de l'espace à n dimensions* et publié dans le *Mémorial* sous le numéro XXIX.

L'espace à  $n$  dimensions, défini par  $n$  variables, est plutôt *cartésien* qu'euclydien; il est ouvert. Fermé par les points à l'infini, il devient l'espace de Desargues. L'espace projectif repose naturellement sur la considération de formes linéaires; il devient *fonctionnel* quand ses *points* sont déterminés non pas par des coordonnées en nombre fini mais par une suite continue de valeurs empruntées à une fonction. Dans ces conditions, il y a des variétés géométriques définies par des équations intégrales et la résolution de celles-ci peut-être comparée, par exemple, aux opérations faites, dans les domaines élémentaires, pour passer des coordonnées ponctuelles aux coordonnées tangentielles ou inversement.

Avec les suites de points à point limite, nous revenons aussi quelque peu à des considérations topologiques telles celles du fascicule antérieur de M. Wilkosz.

Il faut signaler, tout particulièrement, la dérivation ponctuelle ou tangentielle qui adjoint, à un arc donné, des arcs dérivés d'ordres quelconques. Cette suite d'arcs, prise dans l'ordre inverse, donne des arcs *antidérivés*. On pourrait croire, au premier abord, que, la première dérivation étant de nature différentielle, l'antidérivation sera de nature intégrale; or, il n'en est rien. Les deux opérations sont dépourvues de quadratures. Les antidérivées ont, entre elles, des relations permettant de généraliser les propriétés des courbes gauches, considérées notamment dans leurs relations avec leurs développées. Des courbes peuvent être *réciroquement dérivées*; leur recherche, dans le cas le plus simple, constitue le *problème de Kœnigs*. Le pourquoi de la solution de ce problème n'apparaît point sans digressions profondes sur les courbes quadratiques et les courbes *minima*. De même, la comparaison de la dérivation et de la transformation projective conduit aux courbes *anharmoniques*. Les configurations, à deux dimensions, déterminées par deux courbes, terminent cet exposé, véritablement très beau, où nombre d'objets de géométrie classique trouvent des généralisations d'une allure simplificatrice indéniablement très curieuse.

A. BUHL (Toulouse).

Michel PETROVITCH. — **Intégration qualitative des équations différentielles.**

(Mémorial des Sciences mathématiques, dirigé par Henri Villat; fasc. XLVIII.) — Un fascicule gr. in-8° de 58 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>. Paris, 1931.

Le titre de ce fascicule en exprime très clairement le contenu. Il s'agit surtout de reconnaître, dans le domaine réel, l'allure des courbes définies par une équation différentielle. Sur un tel sujet les travaux les plus importants, et de beaucoup, sont toujours ceux que M. Emile Picard a réunis dans le troisième volume de son *Traité d'Analyse*, ainsi que ceux dus à Henri Poincaré et maintenant faciles à consulter dans le tome premier des Œuvres du célèbre géomètre, tome publié par Paul Appell en 1928.

L'exposé de M. Petrovitch peut servir d'introduction à ces grandes études tout en indiquant comment elles se sont développées avec Bendixon, Birkoff, Bôcher, Borel, Boutroux, Brouwer, Büchel, Chazy, Cotton, Delassus, Dulac, Hilb, Horn, Kneser, Lindelöf, Osgood, Petrovitch, Lord Rayleigh et quelques autres. Les travaux dus à Poincaré, à M. Emile Picard et aux auteurs en question ne forment pas moins de 92 ouvrages ou mémoires, cités ici en index bibliographique.

On sait toute la valeur que Poincaré attachait à ces études qualitatives, notamment au concept de *stabilité*; il en entrevoyait le rôle bien avant de l'avoir fixé en ses recherches sur le Problème des trois corps et les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste.

Une élégance relativement simple se manifeste d'ailleurs quant à l'énoncé des conditions qui font qu'une intégrale d'équation différentielle présente des infinis, des zéros ou d'autres éléments remarquables indépendants de la constante d'intégration.

Les équations linéaires et homogènes du second ordre, depuis Sturm et Liouville, ont été étudiées par des procédés calqués, autant que possible.

sur les procédés élémentaires correspondant au cas des coefficients constants, d'où les constructions *oscillantes* généralisant les constructions périodiques. Les équations intégrales peuvent naître ici mais on peut aussi se proposer de rester sur le terrain différentiel, ce que fait M. Petrovitch. Il termine, avec l'encadrement des courbes intégrales, par un procédé d'extension du théorème classique de la moyenne; il encadre aussi la courbe intégrale de l'équation de Riccati mise sous la forme  $y' = \varphi(y-f)(y-g)$ . Tout l'ensemble ainsi constitué est constamment maintenu très près des idées originelles. Raison, encore une fois, pour s'initier à celles-ci en se laissant guider par M. Petrovitch.

A. BUHL (Toulouse).

Nicolas KRYLOFF. — **Les méthodes de solution approchée des Problèmes de la Physique mathématique** (Mémorial des Sciences mathématiques, dirigé par Henri Villat; fasc. XLIX). — Un fascicule gr. in-8° de 70 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>, Paris. 1931.

La Physique mathématique et la Physique théorique semblent poser trois grandes catégories de problèmes. La première a trait à la formation des équations, ce qui relève, au fond, ne nous lassons point de le répéter, des propriétés mêmes des intégrales multiples. La seconde a trait à l'intégration de ces équations; c'est dans ce domaine que dominant maintenant les méthodes de Fredholm et de M. Volterra. Nous n'avons point cédé, en d'autres analyses bibliographiques, la préférence que certains auteurs accordaient à M. Volterra. Notons, avec la même impartialité, que M. Nicolas Kryloff est plutôt partisan de Fredholm. Quant à la troisième catégorie de problèmes, elle constitue un domaine surtout travaillé par Walter Ritz et par M. Kryloff lui-même; on s'y attache davantage aux expressions approchées, se rapportant à des possibilités de calculs numériques, qu'aux expressions formelles à construction analytique plus esthétique que pratique. Le dernier point de vue n'est d'ailleurs pas moins intéressant que les précédents. M. Jacques Hadamard en a donné un aperçu, en 1930, dans le tome second de son *Cours d'Analyse* et non sans éloges. Le présent fascicule permettra de s'initier, de plus près encore, à des théories que leur caractère maniable rend extrêmement dignes d'attention. Il s'agit surtout du procédé de l'algorithme variationnel; on étudie des suites minimantes, des intégrales, exprimant une orthogonalité fonctionnelle, inféodées d'abord à une certaine inégalité de Bouniakowski-Schwarz. Le plus intéressant est que les solutions approchées ainsi obtenues se construisent comme de véritables solutions, par des méthodes nouvelles qui, en fin de compte, peuvent concurrencer le Calcul des variations. Les idées de Ritz apparaissent, avec toute leur valeur, dans les démonstrations de convergence et même dans les appréciations d'erreurs commises jusqu'en une approximation d'ordre quelconque.

Avec les méthodes de différences finies, différentielles à la limite, on peut encore mieux saisir, sur le vif, les procédés majorants *de moindre majoration*; minimiser la majoration est un concept essentiel d'où semblent naître tout un mécanisme variationnel, nouveau et profondément original, dont les progrès récents appartiennent surtout à MM. N. Bogoliouboff et N. Kryloff. Ces noms sont bien connus des lecteurs des *Comptes rendus*. Il fut également un temps où M. Kryloff publiait, dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, d'admirables travaux que le marasme révolutionnaire ne

permettait pas de publier en Russie. Nous en avons aujourd'hui un brillant résumé que les géomètres français n'accueilleront pas avec moins de sympathie.

A. BUHL (Toulouse).

C. BIALOBRZESKI. — **La Thermodynamique des Etoiles.** (Mémorial des Sciences physiques, dirigé par Henri Villat et Jean Villey; fasc. XIV.) — Un fascicule gr. in-8° de 50 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>. Paris, 1931.

La question est d'un extrême intérêt. Ce sont les lois du microcosme atomique qui se transportent dans l'Univers stellaire, d'abord parce que les choses se ressemblent, malgré la prodigieuse différence d'échelle, ensuite parce que les étoiles sont, en général, dans des conditions de température et de pression qui correspondent à la dissociation intra-atomique.

Les étoiles ont besoin de diverses classifications mais celles-ci sont toutes très simples. Une première chose très remarquable bien qu'évidente est que nous jugeons de la « grandeur » d'une étoile par la *sensation* lumineuse qu'elle nous fait éprouver; c'est l'occasion d'appliquer la loi de Fechner dont il a été question, plus haut, en analysant les *Eloges et Discours* de M. Emile Picard. Il y a aussi une notion de grandeur *absolue* merveilleusement déterminable par un procédé spectroscopique découvert en 1913 par M. W. S. Adams. Ce procédé permet de déterminer la distance d'un grand nombre d'étoiles; la méthode astronomique des parallaxes est considérablement dépassée. En mettant les types spectraux en abscisses et les éclats absolus en ordonnées, on obtient un diagramme célèbre groupant les étoiles en deux bandes faisant un certain angle. Nous sommes vraisemblablement à un tournant où l'astronomie stellaire apparaît avec des lois simples.

La Thermodynamique proprement dite se précise surtout avec les travaux de M. Eddington. Différentes espèces d'énergie sont en jeu et, à chacune, appartient une *masse*; cette notion, si fugitive en des radiations telles que la lumière de notre espace ordinaire, prend une importance capitale dans une étoile, véritable champ d'équilibre entre masses matérielles et masses énergétiques.

L'existence d'anomalies densitaires fait intervenir la Mécanique ondulatoire, les considérations quantiques et statistiques de M. Fowler, le déplacement des raies spectrales vers le rouge quand la source lumineuse se trouve dans un champ gravitationnel intense. Sur ce dernier point, le satellite de Sirius fournit une vérification remarquable de l'effet Einstein.

Quant à l'évolution stellaire, en général, elle n'est pas sans comporter quelques hypothèses formidables, telles celles de l'anéantissement de la matière.

L'auteur a grandement contribué aux travaux ici exposés. En peu de pages, il nous donne des aperçus plus que grandioses sur une science tout à fait nouvelle.

A. BUHL (Toulouse).

G. VAN LERBERGHE. — **Calcul des Affinités Physico-Chimiques.** (Mémorial des Sciences physiques, dirigé par Henri Villat et Jean Villey; fasc. XV.) — Un fascicule gr. in-8° de 74 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>. Paris, 1931.

Il n'est peut-être pas exagéré de dire que la science ici exposée est, au

moins en notable partie, science belge. M. Th. DE DONDER a publié, en 1927, une importante étude sur l'affinité. M. G. van Lerberghe et lui ont collaboré. Quant à M. Lecat, fameux pour ses recherches sur les déterminants à  $n$  dimensions, faut-il rappeler encore qu'il est, en même temps, le champion de l'azéotropisme. Ceci n'empêche pas, bien entendu, que de grands noms, de nationalités diverses, sont attachés au sujet. Il suffit de citer Duhem, Gibbs, Jouguet, Lewis, Nernst, Jean Perrin, Planck, Poincaré, Urbain, Van't Hoff. En gros, il s'agit de Thermodynamique pour systèmes à plusieurs phases. Une chaleur non compensée,  $TdS - dQ$ , peut se traduire, de diverses manières, par  $\mathcal{A}d\xi$ , si  $\xi$  est l'avancement de la réaction ou la variable *chimique*. C'est  $\mathcal{A}$  qui est l'affinité; on voit qu'on peut en donner une définition purement analytique, analogue à celle de l'énergie interne, de l'entropie, de la pression ou de la température. Et l'on peut montrer facilement que cette définition correspond bien au sens vulgaire du mot affinité. Il y a là une représentation de la *tendance* du système. Une affinité non nulle, dans un système qui ne change pas, correspond à un état de *faux équilibre*. L'affinité des gaz parfaits se formule facilement. Il y a encore une analyse générale, simple et brève, quant à l'expression de  $\mathcal{A}$  par les potentiels thermodynamiques. Les choses sont plus complexes quand il s'agit des potentiels chimiques de Gibbs. Mais l'élégance reste grande avec l'affinité considérée comme différence de potentiels chimiques correspondant les uns à des constituants *de gauche*, les autres à des constituants *de droite*. Vient ensuite le notion de « fugacité » assez comparable, quoique plus générale, à une pression partielle dans une solution de gaz parfaits. Il y a des comparaisons entre systèmes complexes et systèmes standards où certains rapports de fugacités mesurent des *activités*. L'affinité s'exprime encore en fonction de coefficients physico-chimiques, en fonction de forces électromotrices; elle se calcule par le Principe de Nernst qui fait intervenir l'entropie, au zéro absolu, d'un système dont les phases sont des corps purs cristallisés. La notion a pour elle une analyse simple et parfois un aspect géométrique qui rend intuitives de délicates questions de Thermodynamique et de Physico-Chimie.

A. BUHL (Toulouse).

A. BOUTARIC. — **La concentration des ions hydrogène.** (Mémorial des Sciences physiques, dirigé par Henri Villat et Jean Villey; fasc. XVI.) — Un fascicule gr. in-8° de 70 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>. Paris, 1931.

Ceci est de la Physico-Chimie à peu près sans formules mathématiques, bien que l'auteur soit mathématicien. Les formules sont surtout chimiques et les H y jouent un grand rôle. Il s'agit de réactions limitées, de dissociations électrolytiques qui s'effectuent en présence d'un corps non nécessaire à la dissociation mais qui a pour effet d'en modifier le régime, notamment quant à la concentration en ions H. Les dénombrements d'ions, en solutions acide ou basique, obéissent à des relations d'une grande simplicité. Il y a toutefois des complications pour les électrolytes forts et il semble que ce soit ici l'occasion de retrouver, avec Lewis, une quantité nouvelle dite *activité* et déjà rencontrée dans le fascicule précédent. Il y a *hydrolyse* quand certains sels, en dissolution dans l'eau, y subissent une décomposition partielle. Le phénomène s'étudie aisément en faisant intervenir les ions produits par l'eau.



La définition de l'acidité des liquides ne va pas sans quelque difficulté. Les mêmes acidités titrimétriques sont loin de correspondre toujours à une même concentration en ions. Souvent même, ces concentrations varient entre de telles limites qu'on ne peut les représenter, à la même échelle, sur un même graphique. D'où l'emploi, plus commode, du symbole logarithmique  $p_H$ . Les nouvelles expressions ainsi introduites deviennent maniables; on peut aisément préparer des solutions où elles ont une valeur assignée. On arrive à la notion de mélanges *régulateurs*.

Tout le reste du fascicule est consacré à la mesure du coefficient  $p_H$ . Il y a des méthodes électrométriques revenant à la construction de curieux types de piles. Par emploi du noir de platine, on peut obtenir des électrodes à hydrogène. Les électrodes au calomel, à quinhydrone, à antimoine ne sont pas moins curieuses et souvent beaucoup plus commodes quand il faut opérer rapidement sur des substances altérables. Enfin il y a des méthodes colorimétriques, des solutions *indicatrices*, dont la teinte varie avec la concentration en ions H. C'est là, si l'on veut, un perfectionnement récent et délicat de l'antique intervention de la teinture de tournesol quant à une première opposition des acides et des bases.

Mais tout le sujet développé par M. A. Boutaric n'est qu'extrême délicatesse tant théorique qu'expérimentale. A. BUHL (Toulouse).

M. BARBILLION. — **Réglage électrique et mécanique des Stations centrales productrices d'énergie.** (Mémorial des Sciences physiques, dirigé par Henri Villat et Jean Villey; fasc. XVII.) — Un fascicule gr. in-8° de 66 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>. Paris, 1931.

La question soulevée est d'une extrême généralité théorique, l'importance du point de vue utilitaire étant d'ailleurs considérable. Régler une production d'énergie suivant la demande, suivant la variation brusque des charges et des résistances, et ce de manière automatique, est un desideratum né avec la machine à vapeur et partiellement satisfait par des régulateurs tels celui de Watt. Mais les choses s'étendent dans le domaine électrique où elles se transforment même complètement dans les stations utilisant la houille blanche. Le problème est très différent suivant qu'il s'agit de courants continus ou de courants alternatifs, cas où il importe aussi de conserver la fréquence. N'essayons pas de résumer la description de dispositifs tels le compoundage des inducteurs où l'emploi de groupes survolteurs. Ce qu'il faut remarquer surtout, dans le texte de M. Barbillion, c'est le minime emploi de l'analyse mathématique et, au contraire, l'usage constant de figures et de graphiques. Les problèmes sont à solutions très intuitives et de nature très géométrique. Les créateurs durent surtout les voir, d'où une foule de transformations auxquelles le calcul est assez étranger.

La régulation *indirecte* est notamment l'occasion d'une grande dépense d'ingéniosité. On peut d'abord se proposer de conserver le principe élémentaire de Watt et, dans une usine hydro-électrique, d'agir sur l'admission d'eau par un vannage automatique. Mais ceci ne va pas sans un effort qui exige un moteur spécial et crée des difficultés, parfois grandes, telles l'apparition de coups de bélier dans des conduites dont le débit ne se modifie pas impunément.

Bien que la perfection ne soit point atteinte, on peut dire que la régu-

lation électrique, directe ou indirecte, est une merveille. La facilité de transporter les effets désirés à des distances quelconques permet d'instituer des réseaux régularisés comme par une sorte de conscience partout agissante. Si le réseau ne pense pas, il semble, au moins, qu'il vive, d'une vie multiple conservant, conciliant des vitesses, des tensions, des fréquences. Et il semble aussi qu'on ne soit pas condamné à se contenter éternellement d'un à peu près. L'exposé de M. Barbillion laisse entrevoir des solutions définitives.

A. BUHL (Toulouse).

LOUIS CAGNIARD. — **Les variations du Pouvoir inducteur spécifique des Fluides.** (Mémorial des Sciences physiques, dirigé par Henri Villat et Jean Villey; fasc. XVIII.) — Un fascicule gr. in-8° de 62 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>. Paris, 1931.

C'est à Faraday, Mossotti, Clausius que remonte la notion de pouvoir inducteur spécifique, en abrégé de P. I. Les idées de Maxwell sur le rôle des diélectriques s'y mêlent forcément mais, malgré la Théorie de Debye et les efforts de Langevin, ce rôle est encore loin d'être précisé de façon satisfaisante. Actuellement, il devient, de toutes manières, extrêmement remarquable, avec les formes actuelles de la Physique théorique, avec les discontinuités quantiques de la polarisation diélectrique, les notions d'équilibre statistique et l'intervention de considérations probabilitaires d'abord imparfaitement maniées mais qui, étant dans la nature des choses, sont plus à perfectionner qu'à proscrire.

Les résultats expérimentaux ont aussi leurs incohérences, très excusables d'ailleurs, les variations du P. I. des liquides, avec la pression, demandant des appréciations de capacité extrêmement délicates. La détermination du P. I. des gaz est plus difficile encore mais les résultats acquis sont mieux d'accord avec les faits que ceux relatifs aux liquides car, dans ce dernier cas, on n'a pas le droit de négliger des actions intermoléculaires.

Ces actions entre molécules voisines ont donné lieu à une théorie « complète » de Gans, plus *indéterminée*, à vrai dire, que *complète*. C'est cela qui lui fait un succès facile, sans autoriser toutefois une négation de son ingéniosité. Il est difficile aussi d'accorder les différents théoriciens sur l'existence de dipôles dans tel ou tel diélectrique. En provoquant un état de dilution de molécules dipolaires on peut, semble-t-il, négliger les associations de dipôles; malheureusement on a surtout pris pour solvant le benzène généralement considéré comme dipolaire. La dipolarité engendre des phénomènes de dispersion dans le domaine hertzien.

Debye, s'inspirant d'une idée d'Einstein, traite la molécule dipolaire comme une sphère pouvant se mouvoir en milieu continu suivant les lois de l'hydrodynamique classique. C'est déjà compliqué et l'analogie est vague. Un diélectrique liquide, dans un champ tournant de haute fréquence, doit subir une rotation avec une orientation retardée des dipôles. Enfin des sols d'anhydride vanadique, découverts par M. Errera, ont un P. I. énorme, de caractère « caricatural »; mais il s'agit d'un colloïde, c'est-à-dire d'un corps en évolution continue. Le P. I. reste donc, pour bien des raisons, d'une étude aussi déconcertante que captivante.

A. BUHL (Toulouse).

A. RICHARD. — **La synthèse industrielle des alcools.** (Mémorial des Sciences physiques, dirigé par Henri Villat et Jean Villey; fasc. XIX.) — Un fascicule gr. in-8° de 54 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>. Paris, 1931.

Sujet intéressant sous bien des rapports, surtout intéressés, mais particulièrement remarquable pour un universitaire toulousain qui y trouve, au premier rang, le nom d'un collègue illustre, M. Paul Sabatier, nom accompagné d'ailleurs de ceux de savants émérites tels MM. Senderens et Mailhe. La consommation, chaque jour plus grande, de combustibles liquides, porte à des essais de synthèses qui, en ce qui concerne les alcools, n'ont pas encore été couronnés de définitifs succès. Mais comme la garance, l'indigo, le camphre doivent plus aujourd'hui à la chimie qu'à la culture, les chercheurs espèrent toujours une fabrication vraiment industrielle des alcools et même des pétroles.

M. Richard a limité son sujet aux synthèses de l'alcool éthylique, de l'alcool amylique et du *synthol* présenté comme combustible de remplacement.

Berthelot, en 1855, réalisa une synthèse de l'alcool éthylique à partir de l'éthylène qui, malheureusement, provenait de l'alcool. Cependant, avec une pénétration suffisante et une connaissance plus approfondie de la catalyse, il n'était pas impossible d'éviter ce cercle vicieux. L'hydrogénation et l'hydratation de l'acétylène semblèrent ouvrir d'autres voies vers la production d'aldéhyde éthylique qu'il reste à réduire et à transformer en alcool. C'est ici qu'interviennent les procédés de MM. Sabatier et Senderens. Ces procédés, appliqués à l'alcool amylique, échouèrent d'abord mais le principe mis en jeu n'en avait pas moins une grande valeur et devait conditionner des réussites ultérieures telles celle de M. Patart où des réactions paresseuses étaient activées par la pression et où d'excellents catalyseurs étaient découverts du côté des chromates, manganates, molybdates et tungstates. Plus mystérieux est le procédé de la Badische Anilin und Soda Fabrik. Ceux de la Compagnie des Mines de Béthune et les Etudes de la Société nationale des Recherches sur le traitement des combustibles sont moins volontairement cachés mais il est encore prudent d'attendre pour porter, à leur égard, un jugement définitif.

Avec le *synthol* ou huile synthétique (*Synthetisches Oel*) on ne s'astreint pas à reproduire des composés déjà connus; tout produit acceptable par un moteur à explosion est le bienvenu. La pression et l'emploi d'un catalyseur jouent encore un rôle fondamental. On touche évidemment à des aboutissements de plus en plus pratiques. A. BUHL (Toulouse).

Julien PACOTTE. — **La Pensée technique** (Bibliothèque de Philosophie contemporaine). — Un volume petit in-8° de 11-156 pages. Prix: 15 francs. Félix Alcan, Paris. 1931.

M. Julien Pacotte est déjà connu pour ses ouvrages scientifiques et philosophiques. Il développe maintenant une idée qui ne manque point d'originalité. On a trop souvent tendance à considérer les applications scientifiques comme relevant d'un domaine de pensées inférieur au domaine de la recherche abstraite. Or, l'homme véritablement actif et intelligent ne fait rien sans penser. Il peut donc y avoir une pensée technique qui non seulement réalise intelligemment, mais qui jouit de créations dont le but

utilitaire n'enlève point l'attrait. M. Pacotte dit même ces choses avec des phrases particulièrement heureuses. La technique simplifie l'expression mathématique des phénomènes. Elle porte ainsi au plus haut degré l'intelligibilité de la nature (p. 19).

La machine n'est évidemment jamais une abstraction mais elle a été imitée, en nombre de théories abstraites, par exemple par les physiciens mathématiciens de l'école anglaise. Il y a une transformation technique des phénomènes. La cinématique peut intéresser autant l'ingénieur que la géométrie. L'enregistrement est chose capitale équivalant à la constitution d'une mémoire. La spatialisation du temps équivaut à l'espace-temps. La géométrie de l'outil est assez limitée; les productions de l'outillage moderne sont cependant merveilleuses et innombrables. Cette disproportion, à elle seule, incite à la réflexion et à la recherche.

Enfin, il y a une orientation actuelle de la Physique mathématique en rapport avec la conception technique de la Physique. On cherche le réel, l'accessible moins que le schème abstrait. Les radiations issues de l'atome sont plus intéressantes que ce qui peut se passer à son intérieur d'où l'abandon, au moins partiel, en Mécanique ondulatoire, des trajectoires intra-atomiques de Bohr.

M. Pacotte imagine l'industrie comme devant attendre beaucoup des mécaniques nouvelles. L'explosion utilitaire de l'atome sera peut-être, comme l'a écrit Jean Perrin, une révélation analogue à celle que le feu apporta aux premiers hommes. Les techniques de l'avenir vaudront des philosophies avec moins de sérénité sans doute, mais avec plus d'action. Souhaitons seulement que cette action ne soit pas auto-destructive.

A. BUHL (Toulouse).

P. BRUNET. — **L'Introduction des théories de Newton en France au XVIII<sup>e</sup> siècle.** Avant 1738. — Un vol. in-8<sup>o</sup> de 355 p., Fr. 55.—; Librairie Scientifique Albert Blanchard, Paris, 1931.

Dans cette importante contribution à l'histoire de la pensée scientifique du XVIII<sup>e</sup> siècle, l'auteur s'est proposé de reconstituer l'historique de l'introduction des théories newtoniennes en France. C'est parce qu'elles se heurtaient là à des doctrines cartésiennes déjà solidement établies, que ces théories ont rencontré des résistances particulièrement violentes en France.

Les disciples de Descartes rivalisèrent d'ardeur pour répondre aux objections soulevées par Newton et pour présenter la théorie tourbillonnaire sous le jour le plus favorable dans son application aux divers problèmes scientifiques alors considérés.

La première partie de cette étude s'arrête à l'année 1738, au moment où la publication des *Eléments de la Philosophie de Newton*, par Voltaire, imposa aux débats une tournure nouvelle, qui ne devait pas d'ailleurs longtemps subsister.

E. CAHEN et Ch. MICHEL. — **Leçons élémentaires sur le calcul numérique.** — Un vol. in-8<sup>o</sup> de 110 pages; Fr. 30.—; Gauthier-Villars & C<sup>te</sup>, Paris, 1931.

Ce petit volume reproduit les leçons faites à la Faculté des Sciences de Paris pour la préparation au Certificat de Mathématiques générales. Il

s'adresse aussi aux élèves de Mathématiques spéciales et aux candidats aux grandes Ecoles : Polytechnique, Centrale, etc.

Il y est traité principalement de la *pratique* des calculs ; c'est, en effet, la pratique qui manque le plus aux étudiants.

Les matières sont réparties comme suit : Généralités sur les calculs approchés. — Usage des tables de logarithmes. — Séries numériques. — Substitution d'un nombre dans un polynome entier en  $x$ . — Détermination d'un polynome entier en  $x$  par plusieurs de ses valeurs particulières. — Résolution des équations. — Interpolation. — Calcul des intégrales définies.

De nombreux exercices, dont certains résolus, accompagnent l'ouvrage.

Henri GALBRUN. — **Théorie mathématique des assurances** (Collection Armand Colin). — Un vol. in-16 de 203 p. ; relié, 12 fr. ; broché, 10 fr. 50 ; Librairie Armand Colin, Paris.

Ce nouvel ouvrage de la « Collection Armand Colin » contient un exposé méthodique des principes de l'assurance sur la vie, d'où la simplicité n'a pas exclu la rigueur mathématique. Tout en montrant comment les théorèmes principaux de la théorie des probabilités peuvent être employés à la prévision des résultats présentés par les comptes d'une compagnie d'assurances sur la vie, et sont ainsi à la base même du fonctionnement financier de ces entreprises, l'auteur ne néglige pas le point de vue pratique et passe en revue les moyens de calcul employés journallement par l'actuaire pour obtenir les primes et les réserves des contrats les plus usuels. Ses différents développements ne font d'ailleurs jamais appel qu'à des notions élémentaires de mathématiques, de telle sorte que pour être lus et compris, ils n'exigent aucune préparation spéciale, sauf peut-être l'étude des premiers principes des probabilités. Ainsi se trouve réalisée une œuvre où le curieux de connaissances générales trouvera les renseignements qui peuvent l'intéresser, tandis que l'étudiant voulant acquérir les connaissances propres au métier d'actuaire, y puisera un enseignement précieux qui lui permettra d'aborder avec fruit la lecture de traités plus complets et plus étendus.

MANGOLDT-KNOPP. — **Einführung in die höhere Mathematik**, Band I, 5te Auflage. — Un vol. in-8° de 585 pages, avec 112 figures ; broché, RM. 22,50 ; S. Hirzel, Leipzig, 1931.

L'ouvrage s'adresse aux étudiants qui abordent l'étude des mathématiques. Il leur permet de faire une revision approfondie des éléments d'algèbre et de géométrie analytique qui servent d'introduction aux mathématiques supérieures.

A la suite de la mort de M. Mangoldt, cette nouvelle édition, la cinquième, a été revue et augmentée par M. Knopp, professeur à l'Université de Tubingue. Il s'est efforcé à son tour de présenter les démonstrations avec toute la rigueur désirable.

Ce premier volume comprend les éléments dont la connaissance est nécessaire pour aborder l'étude du calcul différentiel et intégral. Les matières ont été groupées en douze chapitres :

Permutations et combinaisons. — Le système des nombres rationnels. — Le système des nombres réels. — Puissances, racines, logarithmes. Mesure des

angles. — Notions fondamentales de géométrie analytique. — Le système des nombres complexes. — Variable et fonctions. La droite et le plan. — Des limites. — La notion d'ensemble. — Continuité.

O. SCHREIER u. E. SPERNER. — **Einführung in die analytische Geometrie und Algebra, I.** (Hamburger Mathematische Einzelschriften, 10. Heft, 1931). — Un vol. in-8° de 238 p.; broché, R.M. 8.—; B. G. Teubner, Leipzig, 1931.

Cette introduction à la géométrie analytique et à l'algèbre correspond aux leçons professées par M. Schreier à l'Université de Hambourg. Décédé le 2 juin 1929, M. Schreier a été remplacé par l'un de ses anciens élèves, M. Sperner qui s'est fait un devoir d'entreprendre la publication de l'ouvrage projeté par son maître.

Le but que se sont proposé les auteurs n'est pas de réunir les notions classiques que l'on trouve dans tous les traités élémentaires, mais de fournir les bases qui conduisent à l'étude des théories modernes. C'est ce qui fait précisément l'intérêt de ce petit volume.

Après une première étude de l'espace affine à  $n$  dimensions et des équations linéaires, on passe aux propriétés relatives à l'espace euclidien et à la théorie des déterminants.

La dernière partie fournit une introduction à la théorie des corps algébriques. Elle se termine par le théorème fondamental de l'algèbre concernant le zéro d'un polynome.

G. FUBINI et E. CECI. — **Introduction à la Géométrie projective différentielle des surfaces.** — Un vol. in-8° de 292 p.; 60 fr.; Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>, Paris, 1931.

Au cours de ces dernières années, M. G. Fubini, professeur à l'École Polytechnique de Turin, et M. Ceci, professeur à l'Université de Brno, ont apporté d'importantes contributions à la géométrie projective différentielle des surfaces. Dans le volume qu'ils nous présentent aujourd'hui, ils font ressortir les liens entre la géométrie différentielle des surfaces et des réseaux soit avec la géométrie métrique et la géométrie affine, soit avec les méthodes de M. Cartan. Ils ont évité tous les développements qui exigent la connaissance du calcul tensoriel ou de méthodes non élémentaires et ils ont écarté les questions d'un caractère trop difficile pour les débutants. Leur ouvrage constitue un excellent guide permettant de conduire le lecteur par des méthodes aussi simples que possible aux résultats les plus importants de cette branche moderne de la géométrie et de le mettre à même de consulter ensuite des traités plus complets ainsi que les mémoires spéciaux.

H. SCHWERDT. — **Die Anwendung der Nomographie in der Mathematik.** Für Mathematiker u. Ingenieure dargestellt. — Un vol. in-8° de 116 p. avec 240 fig. et 104 tables; relié, R.M. 28.—; Julius Springer, Berlin, 1931.

Plus de trente ans se sont écoulés depuis que, sur l'initiative de Félix Klein, le Professeur Schilling attira l'attention des ingénieurs et géomètres allemands sur les méthodes nouvelles introduites en France dans le calcul graphique et réunies en un corps de doctrine par M. D'Ocagne dans son

remarquable *Traité de Nomographie* (Paris, 1899). Depuis cette époque, cette nouvelle branche a pénétré peu à peu dans l'enseignement des principales écoles techniques supérieures. Les applications ont pris un développement considérable. Aujourd'hui presque chaque spécialité a ses nomogrammes particuliers.

A leur tour, les géomètres allemands ont apporté d'intéressantes contributions; je me bornerai à citer ici les travaux de Runge, Mehmke, Luckey et l'auteur du présent volume. En 1924, M. Schwerdt publia un premier traité intitulé: « *Lehrbuch der Nomographie auf Abbildungsgeometrischer Grundlage* ». Dans ce nouveau volume, s'adressant plus particulièrement aux professeurs de mathématiques, il se propose de mettre en lumière le parti que l'on peut tirer de la nomographie comme moyen de représentation, dans les mathématiques pures, dès l'algèbre et la géométrie élémentaires.

**The National Council of Teachers of Mathematics.** The Sixth Yearbook.

Mathematics in modern Life. Bureau of Publications, Teachers College. — Un vol. in-8° de 195 p., \$1,75, Columbia University, New York, 1931.

Il faut savoir gré à M. Reeve d'avoir réuni dans ce nouveau volume de la collection publiée par le Teachers College de New York une série de notices sur les mathématiques dans la vie moderne. Les maîtres y trouveront d'intéressants aperçus sur la portée des mathématiques dans les sciences sociales et en statistique, dans les sciences physiques, en biologie et en pharmacie, etc. Rédigées par des savants bien connus, ces notices seront aussi lues avec profit par tous ceux qui désirent connaître le rôle des mathématiques dans la vie moderne. En voici la liste:

The Application of Mathematics to the Social Sciences, by Irving FISHER. — Mathematics in Biology, by J. Arthur HARRIS. — The Humanistic Bearings of Mathematics, by C. J. KEYSER. — Mathematics and Religion, by David Eugene SMITH. — The Mathematics of Investment, by William L. HART. — Mathematics in Agriculture, by Harry Burgess ROE. — Mathematics in Pharmacy and in allied Professions, by Edward SPEASE. — Mathematics and Statistics, by Helen M. WALKER. — Mathematics in Physics, by H. Emmett BROWN. — Polygonal Forms, by G. D. BIRKHOFF.  
H. F.

---

## BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

---

### 1. Livres nouveaux :

*Tous les ouvrages adressés à la Rédaction sont signalés ici avec une brève indication de leur contenu, sans préjudice de l'analyse dont ils peuvent être ultérieurement l'objet sous la rubrique « Bibliographie ».*

**Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik**, herausgegeben von der Preussischen Akademie der Wissenschaften. Schriftleiter Georg FEIGL. Sonderhefte. — Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin.

La rédaction continue à faire de gros efforts pour que cette publication puisse paraître dans le plus bref délai possible. Ainsi que nous l'avons