

# IX. Problèmes où intervient la représentation conforme.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1931)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

siques restent constantes étant différentes des lignes  $k^* = \text{const.}$ ; dans le dernier cas, tous les invariants du faisceau  $\varpi = 0$  restent constants le long des mêmes lignes  $z = \text{const.}$

### IX. PROBLÈMES OÙ INTERVIENT LA REPRÉSENTATION CONFORME.

26. A un faisceau de courbes donné, d'équation  $\varpi = 0$ , se rattachent naturellement de façon invariante les courbes  $z = \text{const.}$ ,  $z$  étant un invariant quelconque de l'équation, et les invariants des courbes ainsi introduites facilitent l'interprétation géométrique des invariants d'ordre supérieur de l'équation donnée. D'autres familles de courbes, se rattachant à des invariants relatifs, invariants brisés, etc., sont également intéressantes à considérer; la plus simple est la famille de courbes  $\varphi = \text{const.}$ , et les relations de ce nouveau faisceau avec le faisceau donné interviennent souvent dans les propriétés géométriques: ces courbes  $\varphi = \text{const.}$  sont en effet les *isoclines conformes* du faisceau donné par rapport au système isotherme de lignes coordonnées  $X = \text{const.}$ ,  $Y = \text{const.}$

Les courbes  $W = \text{const.}$  sur un  $ds^2$  donné sont aussi intéressantes, mais elles se rapportent seulement à une représentation plane du  $ds^2$ . Considérons plus généralement une équation  $\varpi = 0$ , et introduisons les formes semi-normales pour deux  $ds^2$  en correspondance

$$ds^2 = W^2 du dv \quad ds'^2 = W'^2 du dv \quad (101)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varpi_1 = \nu_1 \varpi \quad \nu_1 = \frac{W}{2\sqrt{P}} \\ \varpi'_1 = \nu'_1 \varpi \quad \nu'_1 = \frac{W'}{2\sqrt{P}} \end{array} \right.$$

$$r = \frac{\nu'_1}{\nu_1} = \frac{W'}{W}. \quad (102)$$

On a donc  $\varpi'_1 = r\varpi_1$ , et en appliquant les formules relatives aux formes proportionnelles (Chap. III), on obtient sans peine les modifications que subissent les invariants euclidiens attachés aux courbes se correspondant dans une représentation conforme entre deux surfaces. Les courbes  $r = \text{const.}$  interviendront ici à côté des courbes  $\varphi = \text{const.}$ ; nous allons en donner quelques exemples: les courbures géodésiques des courbes  $\varpi = 0$  sur les deux surfaces en question sont liées par la relation

$$D'_1 = \frac{1}{r} (D_1 + \mathcal{D}'_1 r) = \frac{1}{r} (D_1 + \mathcal{D}_1 \log r) \quad (103)$$

qu'on obtient encore en utilisant les formules

$$D_1 = \mathcal{O}_1 \log W + \mathfrak{G}_1 \varphi \quad D'_1 = \mathcal{O}'_1 \log W' + \mathfrak{G}'_1 \varphi$$

$$\mathcal{O}'_1 = \frac{1}{r} \mathcal{O}_1 \quad \mathfrak{G}'_1 = \frac{1}{r} \mathfrak{G}_1 \quad W' = rW .$$

On déduit en particulier de la formule (103): *il est toujours possible de représenter conformément un faisceau de courbes non géodésiques suivant un faisceau de géodésiques, et pour mettre en correspondance conforme deux faisceaux de géodésiques, il est nécessaire et suffisant que ces faisceaux soient ceux des courbes  $r = \text{const.}$ , suivant lesquelles le module de la représentation reste constant.* On peut aussi, pour les relations entre invariants euclidiens, faire appel aux formules vectorielles.

$$\mathbf{g}'_1 = \mathbf{g}_1 - \nabla \log r \quad (104)$$

$$\mathbf{d}'_1 = r \mathbf{d}_1 \quad \mathbf{t}'_1 = r \mathbf{t}_1 \quad \nabla' \log r = \nabla \log r$$

ou l'on suppose les deux  $ds^2$  représentés sur une même surface.

27. Nous modifierons légèrement ici les notations précédentes pour reprendre celles de notre Thèse; au point courant  $\mathbf{m}$  d'une surface est attaché un repère euclidien  $\mathbf{ma}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{n}$ , de sorte que

$$d\mathbf{m} = \omega_1 \mathbf{a}_1 + \omega_2 \mathbf{a}_2$$

$$\omega_1 = A_1(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 \quad \omega_2 = A_2(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_2 ;$$

l'indice  $s$  étant affecté aux opérations superficielles, nous posons

$$d\Phi = \Phi_1 \omega_1 + \Phi_2 \omega_2 \quad \nabla_s \Phi = \Phi_1 \mathbf{a}_1 + \Phi_2 \mathbf{a}_2$$

pour une fonction scalaire  $\Phi(\alpha_1, \alpha_2)$  déterminée sur la surface. Le covariant bilinéaire  $\omega'_1$  de  $\omega_1$  introduit la forme de Pfaff  $\omega_{12}$  et les vecteurs  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$ , par

$$\omega'_1 = [\omega_{12} \omega_2] \quad \text{rot}_s \mathbf{a}_1 = [\mathbf{f} \mathbf{a}_2]_s = \mathbf{g} \times \mathbf{a}_2$$

$$\mathbf{f} = g_1 \mathbf{a}_1 + g_2 \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{g} = \mathbf{J} \mathbf{f} = -g_2 \mathbf{a}_1 + g_1 \mathbf{a}_2 .$$

Soit une première application au *problème des congruences de normales*, traité par Beltrami, Laguerre, etc.; les droites  $[\mathbf{mu}]$ ,  $\mathbf{u}$  étant le vecteur unitaire

$$\mathbf{u} = \sin \theta . \mathbf{a}_1 + \cos \theta . \mathbf{n}$$

forment une congruence de normales s'il existe un point

$$\mathbf{p} = \mathbf{m} + \lambda \mathbf{u}$$

tel que le déplacement  $d\mathbf{p}$  soit orthogonal à  $\mathbf{u}$ , donc

$$\mathbf{u} \times d\mathbf{p} = \mathbf{u} \times d\mathbf{m} + d\lambda = 0 \quad (105)$$

équation qui exprime que  $\mathbf{u} \times d\mathbf{m}$  est une différentielle exacte, donc  $\mathbf{u}$  un gradient (spatial)

$$\mathbf{u} = -\nabla\lambda = \nabla F(\alpha_1)$$

$$\mathbf{v} = \sin\theta \cdot \mathbf{a}_1 = \nabla_s F(\alpha_1) .$$

La condition d'intégrabilité de l'équation précédente

$$\sin\theta \cdot \omega_1 + d\lambda = 0 \quad (105')$$

s'écrit

$$\sin\theta[\omega_{12}\omega_2] + [d(\sin\theta) \cdot \omega_1] = 0 . \quad (106)$$

En écartant la solution  $\sin\theta = 0$ , correspondant aux normales à la surface, et posant

$$\log \sin\theta = \Theta$$

il vient

$$[\mathbf{fa}_2]_s + [\nabla_s \Theta \cdot \mathbf{a}_1]_s = (\mathbf{g} - \nabla_s \Theta) \times \mathbf{a}_2 = g_1 - \Theta_2 = 0 . \quad (107)$$

28. Une solution bien connue est obtenue quand les lignes du champ projeté, de tangentes  $\mathbf{a}_1$ , forment un faisceau de géodésiques  $g_1 = 0$ ; on a alors  $\Theta = G(\alpha_1)$ , fonction arbitraire ( $\theta = \text{const.}$  en particulier).

Revenons au cas général, et soit  $\Theta_0$  une solution particulière de (107); alors

$$\Theta = \Theta_0 + G(\alpha_1) \quad \sin\theta = e^G \sin\theta_0 \quad (108)$$

est la solution générale; il suffit donc de connaître une solution particulière  $\Theta_0$  de

$$(\mathbf{g} - \nabla_s \Theta) \times \mathbf{a}_2 = 0 .$$

Si les lignes du champ projeté,  $\alpha_2 = \text{const.}$ , sont isothermes et si le  $ds^2$ , rapporté à ces lignes et leurs trajectoires orthogonales, a la forme

$$ds^2 = W^2(dX^2 + dY^2)$$

la formule (61) montre qu'il suffit de prendre

$$\Theta_0 = -w + c \quad \sin\theta_0 = \frac{C}{W} \quad \left( e^w = \frac{W}{2} \right)$$

$c, C$  étant des constantes.

La même solution est valable si la forme précédente du  $ds^2$  est rapportée à un système isotherme que les lignes  $\alpha_2 = \text{const.}$  coupent sous angle  $\varphi$  *permanent* (constant le long de ces lignes) puisqu'on a alors

$$\mathbf{g} = -\nabla w + J\nabla\varphi \quad J\nabla\varphi \times \mathbf{a}_2 = 0 \quad \varphi = H(\alpha_2) ;$$

une représentation conforme de la surface suivant le  $dl^2 = dx^2 + dy^2$  fait alors correspondre un faisceau de droites aux lignes du champ projeté.

Enfin, dans le cas général, il suffit de même d'effectuer une représentation conforme transformant en géodésiques les lignes du champ projeté;  $\mathbf{g}' = \mathbf{g} - \nabla_s \log r$  étant alors porté par  $\mathbf{a}_1$ , il reste à satisfaire à

$$(\nabla_s \log r - \nabla_s \Theta) \times \mathbf{a}_2 = 0$$

d'où la solution particulière

$$\sin \theta_0 = Cr .$$

En résumé, les transformations conformes permettent de déduire la solution générale du problème du cas particulier où les lignes du champ projeté sont des géodésiques, le vecteur  $\mathbf{v}$  du champ projeté participant à la transformation conforme (superficielle) qui ramène le faisceau de géodésiques aux lignes de ce champ; le vecteur  $\mathbf{u}$  se déduit ensuite de sa projection  $\mathbf{v}$ .

29. Comme seconde application, nous donnerons quelques indications sur une théorie nouvellement développée; celle des *réseaux cerclés* (zyklische Kurvennetze)<sup>1</sup>; un tel réseau est formé par les courbes d'une surface dont les cercles osculateurs sont, en un même point  $\mathbf{m}$ , cosphériques à un cercle orthogonal à la surface en ce point, et est défini par une équation différentielle du 2<sup>me</sup> ordre. Soit  $\mathbf{u}$  le vecteur unitaire suivant le diamètre de ce cercle, issu de  $\mathbf{m}$ , tangent à la surface; le cercle, de rayon  $\rho$ , est défini en chaque point par le vecteur  $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{u}}{\rho}$  ou par le vecteur perpendiculaire  $\mathbf{v} = -J\mathbf{w}$ .

Un repère superficiel arbitraire  $\mathbf{m}\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$  étant choisi en tout point de la surface, soient  $\mathbf{t}$  et  $\mathbf{q}$  les tangente et normale unitaires aux lignes du réseau cerclé,  $g$  la courbure géodésique (suivant  $\mathbf{q}$ ) d'une ligne d'un faisceau contenu dans ce réseau

$$g = \mathbf{f} \times \mathbf{t} = \mathbf{g} \times \mathbf{q} .$$

<sup>1</sup> W. BLASCHKE, J. RADON: Ueber konforme Geometrie, Abh. Hamb., 4, 5 (1925, 1926). Exposé de T. TAKASU: Differentialkugelgeometrie, Tôkoku Sc. Rep., 17 (1928).

Soit  $\Phi$  l'angle d'une ligne du réseau avec la première ligne coordonnée, à laquelle sont attachés les vecteurs  $\mathbf{f}_0$ ,  $\mathbf{g}_0 = J\mathbf{f}_0$ ; d'après la formule (61), on a

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \nabla_s \Phi . \quad (109)$$

La propriété géométrique indiquée se traduit aussitôt par

$$\mathbf{g} = \mathbf{w} \times \mathbf{q} \equiv \mathbf{v} \times \mathbf{t}$$

donc l'équation différentielle cherchée est

$$(\mathbf{f}_0 + \nabla_s \Phi) \times \mathbf{t} = \mathbf{v} \times \mathbf{t} \quad \mathbf{t} = \frac{d\mathbf{m}}{ds} \quad (110)$$

ou, avec les formes de Pfaff

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= \mathbf{f}_0 \times d\mathbf{m} & \chi &= \mathbf{v} \times d\mathbf{m} \\ \mathbf{g} &\equiv \frac{\omega_{12} + d\Phi}{ds} = \frac{\chi}{ds} . \end{aligned} \quad (111)$$

Sous forme entière, cette équation s'écrit encore

$$\mathcal{G} - \chi ds^2 = 0 \quad (111')$$

avec

$$\mathcal{G} = ds^2(\omega_{12} + d\Phi) = (\omega_1^2 + \omega_2^2)\omega_{12} + \omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1 .$$

L'équation  $\mathcal{G} = 0$  est l'équation du réseau des géodésiques (euclidiennes) de la surface : c'est un cas particulier de réseau cerclé avec  $\chi = 0$ .

### 30. La transformation conforme

$$d\bar{s}^2 = r^2 ds^2 \quad \bar{\mathbf{g}} = \frac{1}{r} \left( \mathbf{g} + \frac{(d \log r)_i}{ds} \right)$$

donne à l'équation (111) la forme

$$\bar{\mathbf{g}} = \frac{\chi + (d \log r)_i}{d\bar{s}} \equiv \frac{\bar{\chi}}{d\bar{s}} \quad (112)$$

ce qui montre que toute transformation conforme change un réseau cerclé en un autre de même espèce, ou conserve l'ensemble de ces réseaux. Si  $\chi_i$  est une différentielle exacte — à covariant bilinéaire  $\chi'_i = 0$ , ou l'invariant  $D_0$  de  $\chi$  nul — on peut annuler  $\bar{\mathbf{g}}$ , donc le réseau cerclé est un réseau de géodésiques conformes pour le  $d\bar{s}^2$  convenable.

D'autre part, dans (111), si  $\chi$  a même covariant bilinéaire que  $\omega_{12}$

$$\chi' = \omega'_{12} \equiv -K[\omega_1 \omega_2] \quad \text{ou} \quad \text{div } \mathbf{w} = \text{div } \mathbf{g} \equiv K \quad (113)$$

K étant la courbure totale du  $ds^2$ , on a

$$\chi = \omega_{12} + d\Psi$$

et l'équation du réseau cerclé se réduit à

$$\frac{d(\Phi - \Psi)}{ds} = 0 \quad \text{ou} \quad ds^2 \cdot d(\Phi - \Psi) = 0 ; \quad (114)$$

par suite ce réseau est alors un réseau *angulaire* (celui défini par les lignes coordonnées dans le cas  $\Psi = \text{const.}$ ); cette forme de l'équation suffit à montrer que la condition (113) est invariante par transformation conforme. On peut évidemment établir une classification des réseaux cerclés au point de vue des transformations conformes superficielles, mais la théorie de ces réseaux peut aussi se baser sur la géométrie conforme spatiale (géométrie des sphères), ce qui en facilite l'étude; aussi nous ne donnons pas d'autres applications <sup>1</sup>.

## X. INVARIANTS DES FORMES ET ÉQUATIONS QUADRATIQUES.

31. Soit une forme quadratique

$$\alpha^{(2)} = L du^2 + 2M du dv + N dv^2 \quad (115)$$

qu'on peut considérer comme décomposable d'une infinité de façons en un produit de deux formes linéaires

$$\varpi_1 = x(A_1 du + B_1 dv) \quad \varpi_2 = \frac{1}{x}(A_2 du + B_2 dv)$$

$x$  étant un facteur arbitraire,  $A_1, B_1, A_2, B_2$  solutions des équations

$$A_1 A_2 = L \quad A_1 B_2 + A_2 B_1 = 2M \quad B_1 B_2 = N .$$

Nous avons indiqué (*Equivalences*) la formation régulière des invariants de la forme  $\alpha^{(2)}$  et les relations de ceux-ci avec les invariants des formes  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$ , et nous avons vu alors qu'on se trouvait amené, en posant

$$L = A^2 \quad N = B^2 \quad (116)$$

<sup>1</sup> Il est, d'autre part, intéressant de rapprocher cette théorie de celle des changements de connexion (avec torsion) des surfaces. Cf. *Thèse, Note terminale*.