VIII. Faisceaux non isothermes.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1931)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

à celle attachée à un autre réseau angulaire isotherme $X =$ const., $Y =$ const., etc. par une similitude dont l'angle et le rapport sont liés par la relation

$$\nabla \log \frac{W}{x} = J \nabla \varphi$$

de sorte que φ et $\log \frac{W}{x}$ sont deux solutions conjuguées de l'équation $\Delta \varphi = o$. C'est par le choix de ces solutions que se différencient les divers réseaux angulaires isothermes constituant l'ensemble des faisceaux isothermes de la surface — brièvement *l'ensemble isotherme*.

Si l'on suppose aussi qu'on effectue, en chaque point **m**, un changement de l'étalon de longueur, de sorte que la simili-étoile de repère du réseau isotherme considéré devienne une *étoile* de vecteurs unitaires, ceci revient à une représentation sur le $d\sigma_0^2$ canonique de ϖ_0

$$d\sigma_0^2 = df^2 + dg^2 = dU\, dV$$

et, selon qu'on opérera sur un étalon de longueur ou l'autre, on considérera les repères et simili-repères attachés à ds^2 et $d\sigma_0^2$ comme de modules 1 et $\frac{1}{x}$, ou x et 1.

VIII. Faisceaux non isothermes.

24. Soit l'équation $\varpi = o$ d'un faisceau non isotherme; par le moyen d'un facteur normant $\nu^* = \sqrt{I}$, on donnera au premier membre de l'équation la forme *normale*

$$\varpi^* = \sqrt{I}\, \varpi \tag{99}$$

dont les invariants seront ceux de l'équation $\varpi = o$; en particulier, si on part des formes $\varpi_0 = df$, ou ϖ_1, on aura

$$\varpi^* = \sqrt{\frac{\Theta'(f, \Omega f)}{\Delta f}}\, df = \sqrt{\Theta'(f, \Omega f)}\, \varpi_1 .$$

Il résulte de la première formule (36) que la forme normale ϖ^* est caractérisée par son invariant I^* ramené à l'unité

$$I^* = 1$$

cependant qu'en général les ordres des opérateurs et des invariants (dont les symboles portent des astérisques) sont majorés de deux unités par rapport à ceux qui leur correspondent pour une forme ϖ

quelconque. Nous avons établi que, jusqu'à l'ordre n inclus, l'équation $\varpi = o$ a $\frac{n(n-3)}{2}$ invariants, soit en général (pour $n > 3$) $n-2$ nouveaux invariants d'ordre n; ces invariants, considérés comme ceux de la forme ϖ^*, sont d'ailleurs donnés par les formules déjà établies, ainsi que les opérateurs différentiels attachés à ϖ^*; ainsi

$$\mathcal{D}^* = I_0^{-\frac{1}{2}} \mathcal{D}_0 = I_1^{-\frac{1}{2}} \mathcal{D}_1 \qquad \mathcal{T}^* = I_0^{-\frac{1}{2}} \mathcal{T}_0 = I_1^{-\frac{1}{2}} \mathcal{T}_1 \qquad \text{etc.}$$

$$D^* = I_0^{-\frac{1}{2}} \Omega f - \frac{\Delta'\left(f, I_0^{-\frac{1}{2}}\right)}{\Delta f} = I_0^{-\frac{1}{2}} D_1 - \overline{\Delta f}^{-\frac{1}{2}} \Delta'\left(f, I_1^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$T^* = -\frac{\Theta'\left(f, I_0^{-\frac{1}{2}}\right)}{\Delta f} = I_1^{-\frac{1}{2}} T_1 - \Delta f^{-\frac{1}{2}} \Theta'\left(f, I_1^{-\frac{1}{2}}\right) \qquad \text{etc.}$$

avec les expressions déjà données

$$I_1 = \Theta'(f, \Omega f) = \Lambda\varphi \qquad I_0 = \frac{I_1}{\Delta f} \qquad \text{etc.}$$

Le ds^2 utilisé pour la formation des paramètres différentiels précédents étant arbitraire, on peut en particulier le fixer suivant le $d\sigma^{*2}$ canonique à ϖ^*, de sorte que cette forme soit à la fois normale et semi-normale. A l'équation $\varpi = 0$ on peut associer l'équation différentielle du 2e ordre $\varpi d\varpi_i - \varpi_i d\varpi = 0$ des courbes constituant avec le faisceau donné le réseau angulaire déjà signalé. L'on peut plus généralement considérer *l'ensemble* (I_1) des courbes de même $\Lambda\varphi$ par rapport à un faisceau isotherme arbitraire et un ds^2 arbitrairement fixé, ensemble formé de faisceaux pour lesquels les seminvariants I_1 seront simultanément ramenés à l'unité quand on passera de ϖ_1 à ϖ^*; un tel ensemble a même généralité que l'ensemble isotherme $(I_1 = 0)$, et les faisceaux qui le constituent sont donnés par l'équation générale

$$\sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\, e^{-i\varphi}\, du + \sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\, e^{i\varphi}\, dv = 0$$

$\xi(u)$, $\eta(v)$ étant des fonctions arbitraires de leurs arguments. L'arc conforme $d\sigma^*$ n'est attaché qu'aux courbes d'un même ensemble (I_1).

Nous avons déjà indiqué *(Equivalences)* certaines formes particulières de l'équation $\varpi = 0$; par exemple dans les cas où le $d\sigma^{*2}$ canonique à ϖ^* serait à courbure totale k^* nulle ou constante, on aurait

$$Q = \frac{a(u)}{b(v)} e^{Z(u)\,M(v)} \qquad k^* = 0$$

$$Q = \frac{a(u)}{b(v)} \left\{ \frac{C\,\overline{Z(u) - M(v)}^2}{2Z'M'} \right\}^{\frac{1}{C}} \qquad k^* = C\,, \quad \text{constante.}$$

25. Le problème de la classification des faisceaux de courbes vis-à-vis des transformations conformes est celui de la conservation des équations $\varpi = 0$, ou des formes normales ϖ^*; si nous avons étudié auparavant la formation des invariants des formes générales ϖ, et des formes particulières ϖ_0, ϖ_1, c'est d'abord parce que les méthodes applicables à ces formes nous menaient aux résultats cherchés pour les formes ϖ^* ou les équations; mais on doit aussi considérer que les invariants des équations sont des fonctions f invariantes, ou conduisent à de nouvelles formes de Pfaff invariantes, auxquelles s'appliquent les calculs précédemment faits.

Quant aux relations suffisantes entre invariants pour assurer l'équivalence conforme d'équations $\varpi = 0$, ou la conservation de formes ϖ^* — le problème relatif aux formes ϖ quelconques offrant ici moins d'intérêt — nous nous contentons de rappeler que pour les formes normales ϖ^* possédant des invariants conformes, nous avons distingué trois classes principales avec:

1° le cas général où les invariants D* et T* du 4e ordre sont distincts;

2° le cas où il y a entre ces deux invariants une relation identique, mais où les invariants du 5e ordre sont distincts de l'invariant du 4e ordre conservé;

3° le cas où les invariants du 4e ordre sont fonctions d'un seul d'entre eux.

On peut interpréter ces trois cas en les ramenant à des problèmes d'applicabilité, en prenant pour ds^2 le $d\sigma^{*2}$ canonique normal sur lequel

$$I^* = I_1 = \Delta\varphi = \text{rot}\,\mathbf{g}_1 = 1$$

les invariants essentiels D* et T* étant alors les courbures géodésiques du faisceau considéré et du faisceau orthogonal; avec les notations de la formule (96) on a alors

$$\left\{\begin{aligned} \varpi^* &= \sqrt{\varphi_{uv}}\,(e^{-i\varphi}\,du + e^{i\varphi}\,dv) \\ ds^2 &= d\sigma^{*2} = 4\varphi_{uv}\,du\,dv \end{aligned}\right. \tag{100}$$

$$W^2 = 4P^* = 4\varphi_{uv} \qquad e^{\omega} = \frac{W}{2} = \sqrt{\varphi_{uv}}$$

les invariants de la forme ϖ^* s'exprimant au moyen de φ et de ses dérivées, et les formes ϖ^* d'un même ensemble différant par le choix de l'angle φ solution de l'équation $4\varphi_{uv} = W^2$.

Dans le cas général, l'ensemble considéré, qui se conserve dans la déformation, est astreint seulement à la condition précédente $I^* = 1$; dans le second cas, le faisceau $\varpi = 0$ appartient à un réseau angulaire *déficient*, les lignes $z = \text{const.}$ suivant lesquelles les courbures géodésiques restent constantes étant différentes des lignes $k^* = \text{const.}$; dans le dernier cas, tous les invariants du faisceau $\varpi = 0$ restent constants le long des mêmes lignes $z = \text{const.}$

IX. Problèmes où intervient la représentation conforme.

26. A un faisceau de courbes donné, d'équation $\varpi = 0$, se rattachent naturellement de façon invariante les courbes $z = \text{const.}$, z étant un invariant quelconque de l'équation, et les invariants des courbes ainsi introduites facilitent l'interprétation géométrique des invariants d'ordre supérieur de l'équation donnée. D'autres familles de courbes, se rattachant à des invariants relatifs, invariants brisés, etc., sont également intéressantes à considérer; la plus simple est la famille de courbes $\varphi = \text{const.}$, et les relations de ce nouveau faisceau avec le faisceau donné interviennent souvent dans les propriétés géométriques: ces courbes $\varphi = \text{const.}$ sont en effet les *isoclines conformes* du faisceau donné par rapport au système isotherme de lignes coordonnées $X = \text{const.}$, $Y = \text{const.}$

Les courbes $W = \text{const.}$ sur un ds^2 donné sont aussi intéressantes, mais elles se rapportent seulement à une représentation plane du ds^2. Considérons plus généralement une équation $\varpi = 0$, et introduisons les formes semi-normales pour deux ds^2 en correspondance

$$ds^2 = W^2\, du\, dv \qquad ds'^2 = W'^2\, du\, dv \tag{101}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \varpi_1 = \nu_1 \varpi & \nu_1 = \dfrac{W}{2\sqrt{P}} \\ \varpi'_1 = \nu'_1 \varpi & \nu'_1 = \dfrac{W'}{2\sqrt{P}} \end{array}\right.$$

$$r = \frac{\nu'_1}{\nu_1} = \frac{W'}{W}\,. \tag{102}$$

On a donc $\varpi'_1 = r\varpi_1$, et en appliquant les formules relatives aux formes proportionnelles (Chap. III), on obtient sans peine les modifications que subissent les invariants euclidiens attachés aux courbes se correspondant dans une représentation conforme entre deux surfaces. Les courbes $r = \text{const.}$ interviendront ici à côté des courbes $\varphi = \text{const.}$; nous allons en donner quelques exemples: les courbures géodésiques des courbes $\varpi = 0$ sur les deux surfaces en question sont liées par la relation

$$D'_1 = \frac{1}{r}(D_1 + \mathcal{D}'_1 r) = \frac{1}{r}(D_1 + \mathcal{D}_1 \log r) \tag{103}$$