# VII. Faisceaux isothermes.

Comme nous l'avons établi, les invariants de la forme $\varpi_1$ sont les invariants euclidiens (géodésiques) de l'équation $\varpi = 0$. Avec les notations

$$\frac{f_u}{f_v} = Q = e^{-2i\varphi} \qquad \frac{W}{2} = e^{w} \tag{49'}$$

on peut écrire une forme semi-normale

$$\varpi_1 = \frac{W}{2}\left(\sqrt{\frac{f_u}{f_v}}\,du + \sqrt{\frac{f_v}{f_u}}\,dv\right) = e^{w-i\varphi}du + e^{w+i\varphi}dv\,. \tag{96}$$

## VII. Faisceaux isothermes.

22. Il est bien connu, dans la représentation conforme des surfaces, qu'à côté des deux faisceaux formés par les deux séries de lignes minima, $du = 0$ et $dv = 0$, les faisceaux isothermes de courbes sont aussi conservés; l'équation différentielle $\varpi = 0$ d'un tel faisceau du premier ordre est en effet caractérisée par la condition invariante

$$I = 0$$

et l'équation $\varpi = 0$ n'a alors aucun invariant conforme. Nous avons donné bien des formes à l'invariant I de $\varpi$; considérons en particulier une forme semi-normale $\varpi_1$ sur un $ds^2$ et rappelons diverses interprétations de l'équation $I_1 = 0$. D'après

$$I_1 = \frac{i}{2}\Lambda \log Q = 0 \tag{97}$$

$$\frac{\partial^2 \log Q}{\partial u\, \partial v} = 0 \qquad Q = \frac{A}{B} = \frac{a(u)}{b(v)}$$

le rapport $\frac{A}{B}$ des coefficients de l'équation $\varpi = 0$ est le quotient de deux fonctions arbitraires, l'une de $u$, l'autre de $v$; le facteur intégrant $\frac{a}{2A} = \frac{b}{2B}$ ramène alors à l'équation intégrable

$$\varpi_0 = \frac{1}{2}\left\{a(u)\,du + b(v)\,dv\right\} = 0$$

et les courbes intégrales sont données par

$$f = \frac{1}{2}\left\{U(u)\,du + V(v)\,dv\right\} = \text{const.} \qquad U' = a\,, \quad V' = b\,,$$

les accents indiquant, pour les fonctions d'une seule variable, les dérivées par rapport à celle-ci; une transformation (3) donne alors à $f$ une forme réduite $\overline{\mathrm{X}} = \frac{1}{2}(\bar{u} + \bar{v})$. L'on a en même temps

$$\mathrm{I}_1 = \Lambda\varphi = 0 \tag{97'}$$

$$\varphi = \frac{i}{2}\log \mathrm{Q} = -\frac{i}{2}\left(\log\frac{1}{a} - \log\frac{1}{b}\right) = -\frac{i}{2}\left\{\Phi(u) - \Psi(v)\right\}$$

donc la condition (97′) exprime aussi que les courbes $\varphi =$ const. forment un faisceau isotherme, $\varphi$ *étant variable isothermique*, et cette propriété est caractéristique; nous nous étions d'ailleurs ramené à des fonctions $f$ pour lesquelles $\Lambda f$ ou $\Omega f$ est nul: c'est ce qu'exprime, à un changement de fonction $f$ près, la forme suivante de l'équation invariante

$$\mathrm{I}_1 = \Theta'(f, \Omega f) = 0 \qquad \Omega f = \mathrm{F}(f) \tag{98}$$

où F est une fonction arbitraire, qu'on peut choisir pour avoir $\Omega\mathrm{F} = 0$. En revenant alors à la notation $f$ pour la fonction choisie, et choisissant de même la fonction $g$ pour que $\Omega g = 0$ puisqu'on a aussi

$$\mathrm{I}_1 = \Theta'(g, \Omega g) = 0$$

il en résulte, d'après (91), $\nabla \log q = 0$, et l'on peut par suite prendre

$$q = 1 \qquad x = y \qquad p = x^2$$

$$ds^2 = \mathrm{W}^2(d\mathrm{X}^2 + d\mathrm{Y}^2) = x^2(df^2 + dg^2) .$$

On a encore

$$\mathrm{D}_1 = \mathcal{D}_1 \log x \qquad \mathrm{T}_1 = \mathcal{T}_1 \log x$$

$$\mathbf{g}_1 = -\nabla \log \mathrm{W} + \mathrm{J}\nabla\varphi = -\nabla \log x$$

toutes formules qui sont bien d'accord avec

$$\mathrm{I}_1 = \mathrm{rot}\,\mathbf{g}_1 = -(\mathcal{D}_1\mathcal{T}_1)\log x = 0$$

et les formes particulières que prennent alors les formules déjà établies.

23. En résumé, ce qui caractérise un faisceau isotherme, c'est d'être associé à un faisceau également isotherme de trajectoires orthogonales, et plus généralement d'être incorporé dans un réseau angulaire isotherme, toutes les courbes d'un tel réseau pouvant être représentées par des intégrales $f =$ const., $g =$ const., etc. pourvues en un même point $\mathbf{m}$ de vecteurs gradients de même module $\frac{1}{x}$; ces gradients forment en tout point de la surface une *simili-étoile*, se ramenant

à celle attachée à un autre réseau angulaire isotherme X = const., Y = const., etc. par une similitude dont l'angle et le rapport sont liés par la relation

$$\nabla \log \frac{W}{x} = J \nabla \varphi$$

de sorte que $\varphi$ et $\log \frac{W}{x}$ sont deux solutions conjuguées de l'équation $\Delta\varphi = o$. C'est par le choix de ces solutions que se différencient les divers réseaux angulaires isothermes constituant l'ensemble des faisceaux isothermes de la surface — brièvement *l'ensemble isotherme.*

Si l'on suppose aussi qu'on effectue, en chaque point **m**, un changement de l'étalon de longueur, de sorte que la simili-étoile de repère du réseau isotherme considéré devienne une *étoile* de vecteurs unitaires, ceci revient à une représentation sur le $d\sigma_0^2$ canonique de $\varpi_0$

$$d\sigma_0^2 = df^2 + dg^2 = dU\, dV$$

et, selon qu'on opérera sur un étalon de longueur ou l'autre, on considérera les repères et simili-repères attachés à $ds^2$ et $d\sigma_0^2$ comme de modules 1 et $\frac{1}{x}$, ou $x$ et 1.

## VIII. Faisceaux non isothermes.

24. Soit l'équation $\varpi = o$ d'un faisceau non isotherme; par le moyen d'un facteur normant $\nu^* = \sqrt{I}$, on donnera au premier membre de l'équation la forme *normale*

$$\varpi^* = \sqrt{I}\, \varpi \tag{99}$$

dont les invariants seront ceux de l'équation $\varpi = o$; en particulier, si on part des formes $\varpi_0 = df$, ou $\varpi_1$, on aura

$$\varpi^* = \sqrt{\frac{\Theta'(f,\, \Omega f)}{\Delta f}}\, df = \sqrt{\Theta'(f,\, \Omega f)}\, \varpi_1 .$$

Il résulte de la première formule (36) que la forme normale $\varpi^*$ est caractérisée par son invariant I* ramené à l'unité

$$I^* = 1$$

cependant qu'en général les ordres des opérateurs et des invariants (dont les symboles portent des astérisques) sont majorés de deux unités par rapport à ceux qui leur correspondent pour une forme $\varpi$