Relation entre les coniques d'inertie et les coniques conjuguées relativement au triangle.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1931)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

Relation entre les coniques d'inertie et les coniques conjuguées relativement au triangle.

L'enveloppe des droites du plan par rapport auxquelles le moment d'inertie du triplet est nul est la conique d'équation tangentielle

$$\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 = 0 \ ,$$

et par conséquent d'équation ponctuelle

$$\frac{X^2}{\alpha} + \frac{Y^2}{\beta} + \frac{Z^2}{\gamma} = 0 \ .$$

C'est la conique conjuguée par rapport au triangle ayant le point Γ *pour centre.*

Il existe, d'une manière générale, une relation remarquable entre la conique d'inertie d'un système matériel quelconque du plan et la conique enveloppe des droites de moment d'inertie nul.

Si l'on considère le système rapporté à ses axes centraux d'inertie, le moment d'inertie par rapport à une droite quelconque $x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varpi$ du plan a une expression de la forme.

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \Sigma m_i (x_i \cos \varphi + y_i \sin \varphi - \varpi)^2 \ , \\ &= \mathcal{A} \cos^2 \varphi + \mathcal{B} \sin^2 \varphi + \mathrm{M} \varpi^2 \ ; \end{aligned}$$

l'enveloppe des droites de moment d'inertie nul est donc la conique d'équation tangentielle

$$\mathcal{A} u^2 + \mathcal{B} v^2 + \mathrm{M} = 0 \ .$$

D'autre part le moment d'inertie du système par rapport à la droite parallèle à la précédente, passant par le centre Γ des masses, est

$$\mathrm{I} = \mathcal{A} \cos^2 \varphi + \mathcal{B} \sin^2 \varphi$$

et la conique d'inertie a pour équation ponctuelle

$$\mathcal{A} y^2 + \mathcal{B} x^2 = 1 \ .$$

La conique enveloppe des droites de moment nul ayant pour équation ponctuelle

$$\frac{x^2}{\mathcal{A}} + \frac{y^2}{\mathcal{B}} + \frac{1}{\mathrm{M}} = 0 \ ,$$

est donc homothétique à la conique d'inertie

$$\frac{x^2}{\mathcal{A}} + \frac{y^2}{\mathcal{B}} = \frac{1}{\mathcal{A}\mathcal{B}} \ ;$$

on pourra prendre $\mathcal{A} = I_1$, $\mathcal{B} = I_2$, I_1 et I_2 étant les moments d'inertie principaux au centre de gravité. La conique enveloppe des droites de moment d'inertie nul se déduit donc de la conique d'inertie par une homothétie, dont le pôle est au centre des masses, et dont le rapport λ est défini par la condition

$$\lambda^2 = -\frac{I_1 \cdot I_2}{M}.$$

Cette remarque permet de déterminer la conique d'inertie à partir de l'enveloppe des droites de moment d'inertie nul. Dans le cas actuel, nous obtenons ainsi une proposition simple.

La conique centrale d'inertie du triplet de centre Γ *est homothétique à la conique de centre* Γ *conjuguée par rapport au triangle.*

Il est ainsi possible de retrouver les expressions $I_1 + I_2$ et $I_1 I_2$ à partir de celles bien connues qui donnent les demi-axes d'une conique conjuguée par rapport au triangle de référence.

Dans le cas où Γ est l'orthocentre H, l'enveloppe des droites de moments d'inertie nuls est le cercle conjugué. Réciproquement, pour que l'ellipse centrale d'inertie d'un triplet soit une circonférence, il faut que le centre des masses soit l'orthocentre. Cette proposition établie plus haut est une conséquence directe du théorème plus général ci-dessus donné.

Cas de la masse totale nulle. — Lorsque la masse totale est nulle l'enveloppe des droites de moment d'inertie est encore une conique conjuguée. Mais, dans l'hypothèse $\alpha + \beta + \gamma = 0$, cette parabole

$$\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 = 0 ;$$

est la *parabole* dont l'axe a la direction du point Γ à l'infini de coordonnées (α, β, γ).

Les coordonnées du foyer F de la parabole conjuguée sont

$$X = \alpha(\psi - \alpha p), \qquad Y = \beta(\psi - \beta q), \qquad Z = \gamma(\psi - \gamma r)$$

avec

$$2\psi = \alpha p + \beta q + \gamma r.$$

L'axe de la parabole conjuguée est la droite de Simson associée au point Γ (au titre d'axe principal d'inertie). Cette droite est définie par le foyer F et par un point φ dont les coordonnées sont:

$$p\alpha^2, \qquad q\beta^2, \qquad r\gamma^2.$$

En remarquant que les coordonnées du foyer de la parabole conjuguée donnent lieu à des relations telles que

$$Y + Z - X = (q + r)\beta\gamma, \qquad \text{etc.}$$

et par suite

$$\frac{\alpha}{\dfrac{q+r}{Y+Z-X}} = \frac{\beta}{\dfrac{r+p}{Z+X-Y}} = \frac{\gamma}{\dfrac{p+q}{X+Y-Z}},$$

il résulte de $\alpha + \beta + \gamma = 0$, l'équation

$$\sum \frac{q+r}{Y+Z-X} = 0$$

du lieu de ce foyer F; c'est l'équation

$$2\Sigma(q+r)YZ = (X+Y+Z)(pX+qY+rZ)$$

du cercle des neuf points du triangle de référence.

La droite de Simson contenant le point F et le point φ, les équations

$$\xi = \alpha(\rho - p\alpha), \qquad \eta = \beta(\rho - q\beta), \qquad \zeta = \gamma(\rho - r\gamma)$$

représentent en fonction d'un paramètre ρ les coordonnées d'un point courant; la distance de deux points quelconques de la droite est proportionnelle à la différence de leurs paramètres $\rho - \rho'$.

La droite de Simson, représentée par ces formules, rencontre le côté BC au point de paramètre $\rho_1 = p\alpha$; la hauteur correspondante est rencontrée au point de paramètre $\rho_2 = q\beta + r\gamma$; le milieu du segment ayant ces deux points pour extrémités a pour paramètre ρ

$$2\rho = p\alpha + q\beta + r\gamma;$$

ce milieu est donc identique au foyer de la parabole conjuguée. *Les trois segments déterminés sur toute droite de Simson par les côtés et les hauteurs du triangle de référence ont pour milieu commun le foyer* F *de la parabole conjuguée.*

Le point φ (de coordonnées $p\alpha^2$, $q\beta^2$, $r\gamma^2$), associé à tout point $\Gamma(\alpha, \beta, \gamma)$ décrit une conique inscrite de centre $\frac{u_0^2}{p}$, $\frac{v_0^2}{q}$, $\frac{w_0^2}{r}$, d'équation,

$$\sum \frac{u_0^2}{pu} = 0,$$

lorsque le point Γ décrit une droite $D_0(u_0, v_0, w_0)$. La polaire, $\Sigma p\alpha X = 0$, de φ par rapport à la conique conjuguée de centre Γ passe par un point fixe $\left(\frac{u_0}{p}, \frac{v_0}{q}, \frac{w_0}{r}\right)$ lorsque Γ décrit la droite D_0.

Nous sommes dans le cas où D_0 est la droite de l'infini. *Le point* φ *a pour lieu la conique inscrite au triangle,*

$$\sum \frac{1}{pu} = 0,$$

concentrique au cercle circonscrit au triangle.

La directrice de la parabole conjuguée, directrice dont l'équation est

$$\sum \frac{\alpha}{p}(Y + Z - X) = 0 ,$$

passe, on le sait, par le centre O du cercle circonscrit; et la polaire de O passe donc par le point F. La polaire de H par rapport à la parabole conjuguée a pour équation

$$\sum \frac{X}{p\alpha} = 0 ;$$

elle passe par φ, *qui est donc défini géométriquement par l'intersection de cette polaire avec la droite de Simson et avec la conique inscrite concentrique au cercle circonscrit.*

La tangente en φ *à cette conique inscrite est précisément la polaire de* H *par rapport à la parabole conjuguée.*

La condition de coïncidence des points φ et F est $\Sigma p\alpha = 0$. Le point Γ est alors le point à l'infini de la polaire trilinéaire de l'orthocentre H.

Si d'autre part, on considère une parabole inscrite d'équation

$$\frac{\mathcal{A}}{u} + \frac{\mathcal{B}}{v} + \frac{\mathcal{C}}{w} = 0 \qquad \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} = 0 ,$$

le foyer M de cette parabole inscrite a pour coordonnées barycentriques:

$$x = \frac{q + r}{\mathcal{A}} , \qquad y = \frac{r + p}{\mathcal{B}} , \qquad z = \frac{p + q}{\mathcal{C}} ;$$

la condition $\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} = 0$ rend manifeste le fait que le lieu du foyer M de la parabole inscrite est le cercle circonscrit:

$$\sum \frac{q + r}{x} = 0 .$$

La directrice, étant la polaire du foyer M par rapport à cette parabole inscrite, son équation est

$$\Sigma p \mathcal{A} X = 0 .$$

par suite, toute droite perpendiculaire à l'axe de la parabole aura pour coordonnées (à un facteur près)

$$u = p\mathcal{A} + \sigma , \qquad v = q\mathcal{B} + \sigma , \qquad w = r\mathcal{C} + \sigma ;$$

σ est un paramètre arbitraire.

La paramètre de la tangente au sommet de la parabole inscrite a pour expression σ:

$$\sigma . (p\mathcal{A}^2 + q\mathcal{B}^2 + r\mathcal{C}^2) = \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C} .$$

Cette tangente au sommet est une droite de Simson, pédale du foyer M de la parabole inscrite.

La confrontation des résultats obtenus séparément pour la parabole conjugués d'axe Δ, et pour la parabole inscrite de tangente au sommet Δ, cette droite Δ étant la même droite de Simson, montre qu'il convient d'introduire trois paramètres l, m, n et de poser ensuite:

$$p\alpha = l , \qquad q\beta = m , \qquad r\gamma = n ,$$
$$\mathcal{A} = m - n , \qquad \mathcal{B} = n - l , \qquad \mathcal{C} = l - m ,$$

avec la condition

$$\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r} = 0 .$$

Au moyen d'un point figuratif, décrivant la droite $\Sigma \frac{X}{p} = 0$, on représente ainsi et en même temps l'infinité de droites de Simson, les paraboles conjuguées les admettant pour axes, les paraboles inscrites les touchant en leurs sommets.

La droite M H — joignant l'orthocentre H au foyer M de la parabole inscrite — a pour équation

$$\Sigma p\mathcal{A}(m + n - l)X = 0 ;$$

le paramètre ρ du point d'intersection de cette droite MH avec la droite de Simson

$$\xi = \alpha(\rho - p\alpha) , \qquad \text{etc.} \ldots$$

a pour valeur:

$$\rho = \frac{1}{2}(l + m + n) \equiv \frac{1}{2}(p\alpha + q\beta + r\gamma)$$

et par suite nous vérifions que ce point est bien le foyer F de la parabole conjuguée.

Ainsi donc F — *foyer de la parabole conjuguée — est le milieu de la droite* MH *et des trois segments déterminés sur la droite de Simson* Δ *par les côtés et les hauteurs du triangle de référence.*

La droite Δ — associée à un point Γ à l'infini, comme axe central d'inertie — rencontre le cercle des neuf points en deux points; dont l'un est le centre de l'hyperbole équilatère admettant Δ pour asymptote et dont l'autre est le point F ainsi défini géométriquement et qui est associé à Γ comme point double à distance finie de l'involution tracée sur Δ par les hyperboles équilatères circonscrites au triangle.

Constructions géométriques. — Pour conclure, nous pouvons donner la construction suivante.

Une droite Δ est imposée comme devant être axe central d'inertie pour un choix convenable de trois masses $(\alpha\ \beta\ \gamma)$ du triplet A B C.

Chaque couple constitué par un côté et la hauteur correspondante du triangle ABC détermine sur la droite Δ un segment A' H, etc. dont les extrémités sont un couple de points conjugués de l'involution.

Soit alors Δ' l'axe radical des trois cercles décrits sur les segments $A'H_1$, $B'H_2$, $C'H_3$.

Δ' rencontre Δ au point Γ qui doit être associé à Δ comme centre des trois masses.

Les axes centraux en Γ sont Δ et Δ'.

Le cercle de centre Γ coupe Δ en deux points qui ne sont autres que les points doubles de l'involution sur cette droite Δ.

On sait que l'enveloppe des droites de même moment d'inertie, pour un système matériel donné, est une conique appartenant à un système homofocal. Ce système comprend la conique conjuguée, enveloppe des droites de moment d'inertie nul. Les foyers de cette conique conjuguée sont des coniques dégénérescentes du système: l'ellipse d'inertie du triplet de centre Γ est un cercle en chacun de ces foyers.

Ces foyers sont les points doubles des involutions respectives sur Δ et sur Δ'.

La construction précédente fait connaître immédiatement les deux foyers réels de la conique conjuguée, par application à l'une des deux droites Δ ou Δ'.

Dans un second mémoire, j'exposerai la question des systèmes de quatre masses disposées aux sommets d'un tétraèdre, en particulier du système de quatre masses ponctuelles égales entre elles et constituant un quadruplet équivalent à un système matériel quelconque. Par l'emploi systématique des coordonnées barycentriques tétraèdriques et par la considération des quadriques conjuguées au tétraèdre fondamental, les calculs de la géométrie des masses peuvent ainsi être présentés sous une forme remarquable.