

SUR LA CONSTANTE D'EULER

Autor(en): **Appell, Paul**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **29 (1930)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-23245>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR LA CONSTANTE D'EULER

PAR

M. Paul APPELL, Membre de l'Institut (Paris).

La formule à obtenir est basée sur la limite de

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$$

lorsque m entier devient infini. On a

$$C = H(k) - \log k + S(k)$$

où $\lim S(k) = 0$ pour $k = \infty$ et où

$$H(k) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k-1}.$$

Dans ce qui suit, quand cela paraîtra plus clair, on écrira aussi

$$S[k], H[k] \quad \text{pour} \quad S(k), H(k).$$

Alors

$$C = H[(\mu m + \lambda)^m] - m \log(\mu m + \lambda) + S[(\mu m + \lambda)^m] \quad (1)$$

et aussi

$$C = H(\mu m^m) - m \log(\mu m) + S(\mu m^m)$$

d'où, par soustraction,

$$0 = H[(\mu m + \lambda)^m] - H(\mu m^m) - \log \left(1 + \frac{\lambda}{\mu m}\right)^m \\ + S[(\mu m + \lambda)^m] - S(\mu m^m),$$

le rapport $\lambda : \mu$ étant irréductible.

Pour $m = \infty$,

$$0 = \lim \{ H[(\mu m + \lambda)^m] - H(\mu m^m) \} - \frac{\lambda}{\mu}$$

d'où, en retranchant de (1) et supposant m infini,

$$C - \frac{\lambda}{\mu} = \lim \{ H(\mu m^m) - m \log(\mu m + \lambda) \} .$$

Telle est la formule que j'avais en vue.

On a, avec $m : p$ entier,

$$C = H[(\mu m - \lambda)^{\frac{m}{p}}] - \log(\mu m - \lambda)^{\frac{m}{p}} + S[(\mu m - \lambda)^{\frac{m}{p}}] ,$$

$$pC = pH[(\mu m - \lambda)^{\frac{m}{p}}] - \log(\mu m - \lambda)^m + pS[(\mu m - \lambda)^{\frac{m}{p}}] .$$

D'autre part, on a, comme plus haut,

$$C = H[(\mu m)^m] - \log(\mu m)^m + S[(\mu m)^m]$$

et, en retranchant,

$$(p - 1)C = pH[(\mu m - \lambda)^{\frac{m}{p}}] - H[(\mu m)^m] - \log \frac{(\mu m - \lambda)^m}{(\mu m)^m} \\ + pS[(\mu m - \lambda)^{\frac{m}{p}}] - S[(\mu m)^m] .$$

En posant $m = pn$, avec m entier multiple de n , il vient

$$(p - 1)C = pH[(\mu pn - \lambda)^n] - H[(\mu pn)^{pn}] - \log \frac{(\mu pn - \lambda)^{pn}}{(\mu pn)^{pn}} + \dots$$

En prenant $p = 2$, on a

$$C = 2H[(2\mu n - \lambda)^n] - H[(2\mu n)^{2n}] - \log \frac{(2\mu n - \lambda)^{2n}}{(2\mu n)^{2n}} + \dots$$

d'où, pour $n = \infty$,

$$C = \lim_{n=\infty} \{ 2H[(2\mu n - \lambda)^n] - H[(2\mu n)^{2n}] \} + \frac{\lambda}{\mu} .$$

Ces résultats s'ajoutent évidemment à d'autres déjà publiés par *L'Enseignement mathématique* (T. XXVI, 1927, p. 11).