3. — Faisceaux de suites de points.

les coordonnées m_i et μ_i prenant indépendant l'une de l'autre toutes les valeurs possibles. Cette représentation montre que la variété v_3 entre dans la classe des variétés étudiées par C. SEGRE[1]. En effet: laissant varier seuls les μ_i on obtient ∞^2 droites génératrices de la variété (chacune desquelles correspondant à un point m), de même, lorsqu'on fait varier seuls les m_i on obtient ∞^1 plans générateurs (chacun correspondant à un paramètre binaire μ).

La variété v_3 est donc le lieu de toutes les droites joignant les points homologues de deux plans en E_5 se correspondant par homologie et, en même temps le lieu de tous les plans joignant les points homologues de trois droites en E_5 se correspondant par homologie.

Les droites, les plans, les espaces E_3 et E_4 de l'espace E_5 sont les images des systèmes linéaires de suites de points qui seront étudiés dans les numéros suivants.

3. — Faisceaux de suites de points.

Soient:

$$(um_1)(\mu_1\tau) = 0\ , \qquad (um_2)(\mu_2\tau) = 0 \tag{12}$$

deux suites de points différentes régulières. Elles sont sur deux droites v_1 et v_2 liées par homologie: A chaque paramètre τ correspond un point de l'une et un point de l'autre. Joignons les paires de points correspondants. Les droites résultantes engendreront une courbe de deuxième classe:

$$(um_1)(\mu_1\mu_2)(m_2u) = 0 \tag{13}$$

qui sera une conique non dégénérée, si les deux suites de points ne sont pas perspectives, condition qui s'exprime analytiquement par l'inégalité:

$$(v_1m_2)(\mu_2\mu_1)(m_1v_2) \neq 0\ . \tag{14}$$

---

[1] C. SEGRE, Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi. *Rend. Circ. Palermo*, 5 (1891). — C. SEGRE, Sulle varietà normali à tre dimensioni. *Torino Atti*, 21. — K. ZINDLER, Synthetische Gewinnung geometrischer linearer Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension. *Journal de Crelle*, 111, p. 303.

Ce cas échéant il résultera en plus une représentation paramétrique de cette conique lieu de droites:

$$(xm_1 m_2)(\mu_1 \tau)(\mu_2 \tau) = 0 \ . \tag{15}$$

J'appelerai *suite de droites de deuxième classe* la figure résultante, c'est-à-dire l'ensemble d'une conique lieu de droites et d'une de ses représentations paramétriques. Passons sur l'étude des cas de dégénérescence de cette figure [1].

Remarquons que, sur une quelconque des droites d'une suite de droites de deuxième classe, les autres découpent une suite de points. Nous dirons que cette suite de points est perspective à la suite de droites. Les suites de points (12) sont perspectives à la suite de droites (15).

Considérons maintenant le faisceau de suites de points:

$$\lambda_1 (um_1)(\mu_1 \tau) + \lambda_2 (um_2)(\mu_2 \tau) = 0 \tag{16}$$

Comme la droite-image en E_5 ne coupe pas en général la variété v_3 le faisceau (16) ne contiendra pas, en général, des suites de points singulières. Je dis que, dans ce cas, *le faisceau de suites de points est formé par l'ensemble de toutes les suites de points perspectives à une suite de droites de deuxième classe.* En effet, formons au moyen de la formule (15) la suite de droites de deuxième classe définie par deux quelconques mais différentes suites de points λ et μ du faisceau (16). Il résulte en tout cas la même suite de droites de deuxième classe:

$$(\lambda\mu) \cdot (xm_1 m_2)(\mu_1 \tau)(\mu_2 \tau) = 0 \ . \tag{17}$$

Il importe, pour ce qui suit, d'insister sur les cas spéciaux. Nous ne donnerons cependant qu'un résumé sommaire:

Tableau des faisceaux de suites de points.

I. *Faisceau sans suite singulière.* Cas général étudié plus haut.

II. *Faisceau contenant une suite singulière.* Les suites de points régulières du faisceau sont toutes perspectives l'une à

[1] Voir sur ce sujet la Thèse de A. TEICHMANN, Beiträge zur Invariantentheorie rationaler Punktreihen in der Ebene. Bonn (1929).

l'autre. Le centre perspectif est un point m et le point d'intersection commun à toutes les suites a sur toutes ces suites le même paramètre μ. La suite singulière du faisceau est formée par l'ensemble du point m et du paramètre μ.

III. *Faisceau contenant deux suites singulières.*

$(um_1).(\mu_1 \tau) = 0$ et $(um_2).(\mu_2 \tau) = 0$ étant les suites singulières du faisceau, les suites régulières de celui-ci sont celles qui contiennent les points m_1 et m_2 et leur donnent les paramètres μ_2 et μ_1.

IV. *Faisceau formé d'une infinité de suites singulières.*

a) Un point m associé à tous les paramètres binaires.

b) Un paramètre μ associé à tous les points d'une droite.

4. — Position involutive d'une suite de points et d'une suite de droites.

Avant de commencer l'étude des réseaux de suites de points il est préférable d'établir la correspondance qui, par la loi de dualité, subsiste entre suites de points et suites de droites. Nous écrirons l'équation d'une *suite de droites* (du premier ordre) sous la forme:

$$(nx)(r\sigma) = 0 \tag{18}$$

et nous appelerons *suite de droites singulière* la figure qui s'obtient en annulant une forme décomposée, c'est-à-dire l'ensemble d'une droite n et d'un paramètre binaire r.

Etant donné une suite de points (6) et une suite de droites (18), ces deux figures définissent une homographie binaire:

$$(mn)(\mu\tau)(r\sigma) = 0 \; , \tag{19}$$

deux paramètres τ et σ se correspondant, si le point τ est sur la droite σ. La condition nécessaire et suffisante pour que cette homographie soit involutive est:

$$(mn)(\mu r) = 0 \; . \tag{20}$$