

# SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES DE SUITES DE POINTS EN GÉOMÉTRIE PLANE PROJECTIVE

Autor(en): **Weiss, E. A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **29 (1930)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-23253>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES DE SUITES DE POINTS EN GÉOMÉTRIE PLANE PROJECTIVE

PAR

E. A. WEISS (Bonn).

---

En géométrie plane projective la figure géométrique formée par l'ensemble d'une droite et d'une quelconque de ses représentations paramétriques joue un rôle important. Cette figure, que j'appellerai *suite de points*, dépend de 5 paramètres essentiels dont 2 proviennent de la droite représentée et 3 de la représentation choisie. Les suites de points forment donc un ensemble (linéaire) à 5 dimensions. C'est la géométrie de cet ensemble qui sera étudiée dans le mémoire suivant.

L'étude de cette géométrie a été inaugurée par Th. REYE qui développa en six mémoires, parus dans le *Journal de Crelle*<sup>1</sup> la géométrie des suites de points et de plans de l'espace projectif à trois dimensions sans avoir du reste étudié de plus près le cas plus simple du plan projectif. Malheureusement la méthode synthétique, dont il se sert, ne lui permet pas d'établir ses théorèmes avec la précision désirable. En particulier la notion (essentielle, comme on verra, pour la théorie) de *suite de points singulière* qui se présente de soi-même, lorsqu'on emploie un appareil analytique convenable, n'apparaît pas dans ses mémoires, n'étant pas susceptible d'une interprétation synthétique simple.

---

<sup>1</sup> Th. REYE, Ueber lineare Mannigfaltigkeiten projektiver Ebenenbüschel und kollinearer Bündel oder Räume. *Journal de Crelle*, 104-108 (1889-1891).

## 1. — SUITES DE POINTS RÉGULIÈRES ET SINGULIÈRES.

Deux paramètres binaires  $\tau_1 : \tau_2$  et  $\sigma_1 : \sigma_2$  étant donnés en notation homogène, je désignerai par :

$$(\tau\sigma) = \tau_1\sigma_2 - \tau_2\sigma_1 \quad (1)$$

le déterminant dont l'évanouissement est la condition nécessaire et suffisante pour que ces deux paramètres soient identiques.

Soient de même :

$$x_1 : x_2 : x_3 \quad \text{et} \quad u_1 : u_2 : u_3 \quad (2)$$

les coordonnées homogènes d'un point  $x$  et d'une droite  $u$ . Je désignerai par :

$$(ux) = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 \quad (3)$$

l'expression qui s'annule si le point est sur la droite. J'écrirai enfin :

$$(pqr) \quad \text{et} \quad (uvw) \quad (4)$$

pour les déterminants formés des coordonnées de trois points  $p, q, r$  ou de trois droites  $u, v, w$ .

Considérons la forme linéaire en  $u$  et  $\tau$  :

$$(um)(\mu\tau) \equiv (u_1m_1 + u_2m_2 + u_3m_3)(\mu_1\tau_2 - \mu_2\tau_1) \quad (5)$$

Ici  $m_i$  et  $\mu_k$  sont des symboles qui, en général, n'ont seuls aucune signification réelle. Un produit  $m_i\mu_k$  seulement a toujours un sens réel et représente un nombre complexe, un des six coefficients de la forme (5). Si, dans l'équation :

$$(um)(\mu\tau) = 0 \quad (6)$$

$\tau$  est, pour le moment, un paramètre fixe, (6) est l'équation d'un point. Des paramètres binaires  $\tau$  différents donnent différents points ternaires qui sont tous sur une droite dont (6) est une représentation paramétrique. *L'équation (6) est donc l'expression analytique pour une suite de points. Les coefficients  $m_i\mu_k$  de l'équation sont les six coordonnées homogènes de cette suite de points.*

Si, au contraire, dans l'équation (6), les  $u_i$  sont regardés comme

coordonnées d'une droite fixe, le paramètre  $\tau$ , solution de l'équation linéaire résultante est le paramètre du point d'intersection de la droite  $u$  et de la suite de points.

Pour obtenir l'équation de la droite représentée par (6) joignons deux points différents  $\tau$  et  $\sigma$ :

$$m(\mu\tau) \quad \text{et} \quad m'(\mu'\sigma) \quad ^1 \quad (7)$$

Or:

$$(xmm')(\mu\tau)(\mu'\sigma) = \frac{1}{2} (xmm')(\mu\mu') \cdot (\tau\sigma) \quad (8)$$

L'équation de la droite cherchée s'obtient donc en annulant la forme:

$$(ux) = \frac{1}{2} (xmm')(\mu\mu') \quad (9)$$

Il y a exception dans le cas où cette expression s'annule identiquement. Ce cas échéant la forme  $(um)(\mu\tau)$  se décompose en deux facteurs, un ternaire et un binaire, dont chacun a une signification réelle:

$$(um) \cdot (\mu\tau) \quad . \quad ^2 \quad (10)$$

Annulé le premier donne l'équation d'un point  $m$ , le deuxième l'équation d'un paramètre  $\mu$ . Nous appellerons *suite de points singulière* cette figure formée par l'ensemble d'un point  $m$  et d'un paramètre binaire  $\mu$ .

## 2. REPRÉSENTATION DES SUITES DE POINTS DANS UN ESPACE $E_5$ .

Interprétons les six coordonnées homogènes d'une suite de points comme coordonnées d'un point d'un espace projectif  $E_5$  à 5 dimensions. A chaque point de cet espace correspondra une suite de points et réciproquement. *Les suites de points singulières auront comme images les points d'une variété  $v_3$  à trois dimensions dont la représentation paramétrique est immédiate:*

$$m_1 \cdot \mu_1 : m_2 \cdot \mu_1 : m_3 \cdot \mu_1 : m_1 \cdot \mu_2 : m_2 \cdot \mu_2 : m_3 \cdot \mu_2 \quad , \quad (11)$$

<sup>1</sup> L'accentuation est nécessaire pour éviter la confusion des deux séries de symboles correspondants.

<sup>2</sup> Le point servira toujours pour séparer des expressions symboliques ayant par elles-mêmes une signification réelle.

les coordonnées  $m_i$  et  $\mu_i$  prenant indépendamment l'une de l'autre toutes les valeurs possibles. Cette représentation montre que la variété  $\nu_3$  entre dans la classe des variétés étudiées par C. SEGRE<sup>1</sup>. En effet: laissant varier seuls les  $\mu_i$  on obtient  $\infty^2$  droites génératrices de la variété (chacune desquelles correspondant à un point  $m$ ), de même, lorsqu'on fait varier seuls les  $m_i$  on obtient  $\infty^1$  plans générateurs (chacun correspondant à un paramètre binaire  $\mu$ ).

La variété  $\nu_3$  est donc le lieu de toutes les droites joignant les points homologues de deux plans en  $E_5$  se correspondant par homologie et, en même temps le lieu de tous les plans joignant les points homologues de trois droites en  $E_5$  se correspondant par homologie.

Les droites, les plans, les espaces  $E_3$  et  $E_4$  de l'espace  $E_5$  sont les images des systèmes linéaires de suites de points qui seront étudiés dans les numéros suivants.

### 3. — FAISCEAUX DE SUITES DE POINTS.

Soient:

$$(um_1)(\mu_1\tau) = 0, \quad (um_2)(\mu_2\tau) = 0 \quad (12)$$

deux suites de points différentes régulières. Elles sont sur deux droites  $\nu_1$  et  $\nu_2$  liées par homologie: A chaque paramètre  $\tau$  correspond un point de l'une et un point de l'autre. Joignons les paires de points correspondants. Les droites résultantes engendreront une courbe de deuxième classe:

$$(um_1)(\mu_1\mu_2)(m_2u) = 0 \quad (13)$$

qui sera une conique non dégénérée, si les deux suites de points ne sont pas perspectives, condition qui s'exprime analytiquement par l'inégalité:

$$(\nu_1 m_2)(\mu_2 \mu_1)(m_1 \nu_2) \neq 0. \quad (14)$$

<sup>1</sup> C. SEGRE, Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi. *Rend. Circ. Palermo*, 5 (1891). — C. SEGRE, Sulle varietà normali à tre dimensioni. *Torino Atti*, 21. — K. ZINDLER, Synthetische Gewinnung geometrischer linearer Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension. *Journal de Crelle*, 111, p. 303.

Ce cas échéant il résultera en plus une représentation paramétrique de cette conique lieu de droites :

$$(xm_1 m_2) (\nu_1 \tau) (\nu_2 \tau) = 0 . \quad (15)$$

J'appellerai *suite de droites de deuxième classe* la figure résultante, c'est-à-dire l'ensemble d'une conique lieu de droites et d'une de ses représentations paramétriques. Passons sur l'étude des cas de dégénérescence de cette figure <sup>1</sup>.

Remarquons que, sur une quelconque des droites d'une suite de droites de deuxième classe, les autres découpent une suite de points. Nous dirons que cette suite de points est perspective à la suite de droites. Les suites de points (12) sont perspectives à la suite de droites (15).

Considérons maintenant le faisceau de suites de points :

$$\lambda_1 (um_1) (\nu_1 \tau) + \lambda_2 (um_2) (\nu_2 \tau) = 0 \quad (16)$$

Comme la droite-image en  $E_5$  ne coupe pas en général la variété  $\nu_3$  le faisceau (16) ne contiendra pas, en général, des suites de points singulières. Je dis que, dans ce cas, *le faisceau de suites de points est formé par l'ensemble de toutes les suites de points perspectives à une suite de droites de deuxième classe*. En effet, formons au moyen de la formule (15) la suite de droites de deuxième classe définie par deux quelconques mais différentes suites de points  $\lambda$  et  $\mu$  du faisceau (16). Il résulte en tout cas la même suite de droites de deuxième classe :

$$(\lambda\mu) \cdot (xm_1 m_2) (\nu_1 \tau) (\nu_2 \tau) = 0 . \quad (17)$$

Il importe, pour ce qui suit, d'insister sur les cas spéciaux. Nous ne donnerons cependant qu'un résumé sommaire :

#### *Tableau des faisceaux de suites de points.*

- I. *Faisceau sans suite singulière.* Cas général étudié plus haut.
- II. *Faisceau contenant une suite singulière.* Les suites de points régulières du faisceau sont toutes perspectives l'une à

<sup>1</sup> Voir sur ce sujet la Thèse de A. TEICHMANN, Beiträge zur Invariantentheorie rationaler Punktreihen in der Ebene. Bonn (1929).

l'autre. Le centre perspectif est un point  $m$  et le point d'intersection commun à toutes les suites a sur toutes ces suites le même paramètre  $\mu$ . La suite singulière du faisceau est formée par l'ensemble du point  $m$  et du paramètre  $\mu$ .

III. *Faisceau contenant deux suites singulières.*

$(um_1).(\mu_1 \tau) = 0$  et  $(um_2).(\mu_2 \tau) = 0$  étant les suites singulières du faisceau, les suites régulières de celui-ci sont celles qui contiennent les points  $m_1$  et  $m_2$  et leur donnent les paramètres  $\mu_2$  et  $\mu_1$ .

IV. *Faisceau formé d'une infinité de suites singulières.*

- a) Un point  $m$  associé à tous les paramètres binaires.
- b) Un paramètre  $\mu$  associé à tous les points d'une droite.

4. — POSITION INVOLUTIVE D'UNE SUITE DE POINTS  
ET D'UNE SUITE DE DROITES.

Avant de commencer l'étude des réseaux de suites de points il est préférable d'établir la correspondance qui, par la loi de dualité, subsiste entre suites de points et suites de droites. Nous écrirons l'équation d'une *suite de droites* (du premier ordre) sous la forme:

$$(nx)(r\sigma) = 0 \quad (18)$$

et nous appellerons *suite de droites singulière* la figure qui s'obtient en annulant une forme décomposée, c'est-à-dire l'ensemble d'une droite  $n$  et d'un paramètre binaire  $r$ .

Etant donné une suite de points (6) et une suite de droites (18), ces deux figures définissent une homographie binaire:

$$(mn)(\mu\tau)(r\sigma) = 0, \quad (19)$$

deux paramètres  $\tau$  et  $\sigma$  se correspondant, si le point  $\tau$  est sur la droite  $\sigma$ . La condition nécessaire et suffisante pour que cette homographie soit involutive est:

$$(mn)(\mu r) = 0. \quad (20)$$

Aussi nous dirons que *la suite de points et la suite de droites sont en involution*<sup>1</sup>, si l'équation (20) est vérifiée.

Signalons trois cas spéciaux. Lorsque les deux suites sont régulières et le point de la suite (18) est sur la droite de la suite (6) l'interprétation géométrique de l'équation (20) consiste en ce que le paramètre  $\tau$  de ce point coïncide avec le paramètre  $\sigma$  de cette droite.

Lorsque (18) est régulière, les suites de points (6) singulières qui se trouvent en involution avec elle sont ceux dont le point est sur la droite de (18) correspondant à leur paramètre.

Si enfin deux suites singulières sont en involution ou leurs paramètres binaires sont identiques ou la droite de la première passe par le point de la deuxième.

#### 5. — SYSTÈMES $\infty^4$ DE SUITES DE POINTS.

La notion d'involution établie, remarquons que chaque équation linéaire en coordonnées  $m_i \mu_k$  de suites de points peut s'écrire sous la forme (20), les  $n_i r_k$  étant les coefficients fixes de l'équation. Or, une telle équation donne, dans l'espace représentatif  $E_5$  des suites de points, un  $E_4$ . *Chaque système  $\infty^4$  de suites de points est donc formé par l'ensemble de toutes les suites de points en involution avec une suite de droites fixe.*

Il y a donc deux espèces de systèmes  $\infty^4$ : une correspondant aux suites de droites régulières et l'autre aux suites de droites singulières.

Considérons d'abord la dernière, caractérisée par une droite fixe  $n$  associée à un paramètre binaire  $r$ . La remarque faite à la fin du numéro précédent montre que les suites de points singulières contenues dans le système  $\infty^4$  sont et les points du plan doués tous de ce même paramètre  $r$  et les points de la droite  $n$  doués d'un paramètre quelconque. Or ces deux systèmes  $\infty^2$  de suites de points singulières donnent, dans l'espace représentatif  $E_5$ : un plan générateur de  $\nu_3$  (correspondant au paramètre  $r$ )

<sup>1</sup> Cette notion a été introduite par W. STAHL, *Journal de Crelle*, 107, p. 179.

contenant une droite distinguée (image de la droite  $n$ ), et les droites génératrices de  $\nu_3$  émanantes de cette droite distinguée.

Remarquons que la variété  $\nu_3$  comme lieu de plans en  $E_5$  se correspondant à elle-même par dualité, aux  $\infty^3$  points de la variété (dont chacun est sur un plan générateur) correspondent  $\infty^3 E_4$  (dont chacun contient un plan générateur). Ce sont précisément les  $E_4$  dont nous venons de parler.

Considérons ensuite un système  $\infty^4$  défini par une suite de droites  $N$  régulière. Les suites de points singulières du système sont celles dont les points sont sur les droites correspondant à leurs paramètres (voir la fin du numéro précédent). Ces suites singulières se trouvent assemblées en faisceaux, à savoir  $\infty^1$  faisceaux du type IV  $b$ , chacun formé par les points d'une droite de  $N$  associé au paramètre de cette droite et un faisceau du type IV  $a$ , formé par le point de  $N$  associé à tous les paramètres binaires.

Dans l' $E_4$ , image de  $N$ , la variété représentative de ces suites singulières est donc une surface réglée possédant  $\infty^1$  droites génératrices, images des faisceaux du type IV  $b$  et une droite directrice, image du faisceau du type IV  $a$ . Cette surface étant l'intersection de  $E_4$  et de la variété  $\nu_3$  du troisième ordre (voir le numéro suivant) est elle-même du troisième ordre. Il s'agit donc d'une *surface normale réglée du troisième ordre en  $E_4$*  et sa directrice est celle découverte par VERONESE.

## 6. — SYSTÈMES $\infty^3$ DE SUITES DE POINTS.

La remarque du numéro précédent nous permet de définir chaque système linéaire par un nombre d'équations. Ainsi un système  $\infty^3$  de suites de points pourra être défini comme système de toutes les suites de points qui sont en même temps en involution avec deux suites de droites différentes, c'est-à-dire avec le faisceau défini par ces deux suites.

Dans le cas général ces deux suites sont régulières, ont leurs centres différents et ne sont pas perspectives. Elles engendrent donc une conique non dégénérée, lieu de points, et douée d'une représentation paramétrique [voir le numéro 3 (15)]. Les suites

de droites projetant cette conique de ses différents points forment le faisceau en question. Considérons une droite non tangente de la conique. Elle la coupe en deux points différents  $p_1$  et  $p_2$  aux paramètres binaires  $\tau_1$  et  $\tau_2$ . Les suites de points sur cette droite qui donnent aux points  $p_1$  et  $p_2$  les paramètres  $\tau_2$  et  $\tau_1$  forment un faisceau (du type III) dont chaque suite est évidemment en involution avec chaque suite de droites du faisceau envisagé.

J'appellerai *suite de points de deuxième ordre* la figure géométrique formée par l'ensemble d'une conique lieu de points et d'une quelconque de ses représentations paramétriques. Les considérations précédentes nous permettent alors d'énoncer le théorème suivant: *Un système  $\infty^3$  de suites de points est en général associé à une suite de points du deuxième ordre. Les suites singulières du système sont celles formées par les points de la conique et les paramètres binaires correspondants. Le système est engendré par les faisceaux de suites de points du type III joignant deux à deux ces suites singulières.*

Quant à la variété des suites singulières du système, sa représentation paramétrique est immédiate. Soit en effet

$$(un_1 n_2) (r_1 \sigma) (r_2 \sigma) = 0 \quad (21)$$

l'expression analytique de la suite de points du deuxième ordre engendrée par les deux suites de droites définissant le système  $\infty^3$  [Voir l'équation duale (15)]; l'équation:

$$(un_1 n_2) (r_1 \sigma) (r_2 \sigma) \cdot (\sigma \tau) = 0 \quad (22)$$

donnera la représentation cherchée, à chaque valeur du paramètre  $\sigma$  correspondant une suite singulière du système. Or ce paramètre entre au troisième ordre. *Dans l'espace représentatif  $E_3$  du système  $\infty^3$  l'image de l'ensemble des suites singulières devient donc une cubique gauche.* Il est possible, en partant de cette remarque, d'établir la théorie de la cubique gauche<sup>1</sup>.

Comme un espace  $E_3$  coupe  $\nu_3$  en général le long d'une cubique gauche, un plan la coupera en général en trois points. *La variété  $\nu_3$  est donc du troisième ordre*, résultat déjà indiqué tout à l'heure.

<sup>1</sup> Ce sujet a été suggéré par E. STUDY à la fin de son mémoire: Ueber die Raumkurven 4. Ordnung zweiter Art. Sächs. Berichte (1886).

7. — SYSTÈME  $\infty^3$  DE TOUTES LES SUITES SITUÉES  
SUR UNE MÊME DROITE.

Nous passons sur la classification des systèmes  $\infty^3$  de suites de points identique à celle des faisceaux de suites de droites correspondant à son tour par dualité à la classification faite au numéro 3. Etudions cependant un cas particulier, celui des suites de points situées sur une même droite. Si

$$(um)(\mu\tau) = 0 \quad (23)$$

est une des représentations paramétriques de cette droite,

$$(\alpha\tau)(\beta\sigma) = 0 \quad (24)$$

l'équation d'une homographie binaire, l'équation:

$$(um)(\mu\alpha)(\beta\tau) = 0 \quad (25)$$

nous donne, en variant l'homographie (24), toutes les suites de points situées sur la droite. Les suites singulières correspondent aux homographies singulières:

$$(\alpha\tau) \cdot (\beta\sigma) = 0 \quad (26)$$

Or, pour ces homographies, le premier membre de l'équation (25) se décompose; on a

$$(um)(\mu\alpha) \cdot (\beta\tau) = 0 \quad (27)$$

En variant  $\alpha$  et  $\beta$  indépendamment l'un de l'autre on obtient les suites singulières du système. *L'ensemble des points-images correspondants forme donc une quadrique non dégénérée*:  $\alpha$  restant fixe nous avons une génératrice dont les points correspondent aux suites singulières formées par un point fixe de la droite (23) associé à tous les paramètres  $\beta$  (IV a);  $\beta$  restant fixe nous avons tous les points de la droite (23) associés à ce même paramètre.

Soit P le point correspondant en  $E_3$  à la suite de points donnée (23). Le plan polaire de P par rapport à la quadrique (27)

est le lieu des points-images des suites de points en involution avec (23). La conique intersection du plan polaire et de la quadrique est le lieu des suites de points singulières :

$$(um) (\mu\sigma) \cdot (\sigma\tau) = 0 , \quad (28)$$

qui composent la suite donnée, c'est-à-dire l'ensemble des suites formées par un point quelconque de la suite (23) associé à son paramètre correspondant.

La conique en question engendre une homologie entre droites et plans générateurs de la variété  $v_3$ . Une droite et un plan de  $v_3$  passant par un point de la conique se correspondent dans cette homologie qui est l'image de l'homologie laissant correspondre à chaque point de (23) le paramètre associé.

Remarquons que l'espace  $E_3$  dont nous venons de parler est l'espace des droites bissectrices <sup>1</sup> de  $v_3$  passant par P et que les droites tangentes engendrent un cône de deuxième ordre qui coupe  $v_3$  suivant la conique (28).

Les espaces  $E_3$  en question (*images des droites du plan projectif*) correspondent enfin par dualité aux droites génératrices de la variété  $v_3$  (*images des points du plan projectif*).

#### 8. — VARIÉTÉ $v_4^3$ DES SUITES DE POINTS PERSPECTIVES D'UNE SUITE DE POINTS FIXE.

Soit :

$$(um_1) (\mu_1\tau) = 0 \quad (29)$$

une suite de points régulière fixe. Les suites de points  $(um)$   $(\mu\tau) = 0$  perspectives avec elle vérifient, d'après (14), l'équation :

$$(v_1 m) (\mu\mu_1) (m_1 v) = 0 \quad (30)$$

de troisième degré en coordonnées  $m_i \mu_k$ .

(30) représente donc en  $E_5$  une variété  $v_4^3$  à quatre dimensions et du troisième ordre qui est complètement déterminée par le point-image P de la suite de points (29). Nous voulons donner une construction de cette variété.

<sup>1</sup> Un espace  $E_3$  de position générale passant par P coupe  $v_3$  le long d'une cubique gauche et il y a une seule bissectrice de la cubique gauche passant par P.

Chaque suite de points perspective à (29) coupe (29) en un point qui, sur les deux suites de points, a le même paramètre. Les deux suites ont donc en commun la suite singulière formée par ce point et le paramètre associé. Or, d'après ce qui a été dit au numéro précédent, si une suite de points contient une suite singulière, le point-image de la première suite est sur une tangente menée à  $\nu_3$  par le point représentatif de la deuxième.

Donc, étant donné P (P n'étant pas sur  $\nu_3$ ), P définit sur  $\nu_3$  la conique des points de contact de ses bissectrices tangentes (28). Les espaces  $E_3$  tangentes de  $\nu_3$  ayant leurs points de contact sur cette conique engendrent donc la variété en question  $\nu_4^3$ . Chacun de ces espaces contient le plan générateur et la droite génératrice de  $\nu_3$  passant par son point de contact. La variété  $\nu_4^3$  contient  $\nu_3$  et l'espace  $E_3$  des bissectrices de  $\nu_3$  passant par P, P étant un point triple de la variété.

#### 9. — RÉSEAUX DE SUITES DE POINTS.

Un plan situé dans un des espaces  $E_3$  étudiés dans les numéros précédents est l'élément représentatif d'un réseau de suites de points. Nous nous bornerons à étudier le cas général, le plan coupant  $\nu_3$  en trois points différents. Le réseau contient dans ce cas trois suites de points singulières  $(um_i) \cdot (\mu_i \tau) = 0$  dont les paramètres sont différents et dont les points ne sont pas sur une droite. Soit:

$$\lambda_1(um_1) \cdot (\mu_1 \tau) + \lambda_2(um_2) \cdot (\mu_2 \tau) + \lambda_3(um_3) \cdot (\mu_3 \tau) = 0 \quad (31)$$

une quelconque des suites régulières de ce réseau. Posons  $u = \widehat{m_2 m_3}$ . Il résulte:

$$\lambda_1(m_1 m_2 m_3) \cdot (\mu_1 \tau) = 0 \quad (32)$$

$(m_1 m_2 m_3)$  étant différent de zéro, il y a deux cas à distinguer: ou  $\lambda_1 = 0$  et la suite de points appartient au faisceau (du type III) défini par les deux suites singulières  $(um_2) \cdot (\mu_2 \tau) = 0$  et  $(um_3) \cdot (\mu_3 \tau) = 0$ , ou  $\lambda_1 \neq 0$  et  $(\mu_1 \tau) = 0$ ; c'est-à-dire  $\mu_1$  est le

paramètre du point d'intersection de la suite de points (31) et de la droite  $m_2 \widehat{m}_3$ .

Le réseau possède donc un triangle fondamental formé par les trois points  $m_1, m_2, m_3$ . A chacun de ces points et, en même temps, à la droite opposée un paramètre binaire est associé:  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ .

Le réseau contient les trois faisceaux (du type III) joignant deux à deux les trois suites singulières et, sur chaque droite ne passant par aucun point du triangle, la suite déterminée par ce fait que ses points d'intersection avec les droites du triangle ont comme paramètres les paramètres associés à ces droites.

Un plan de l'espace  $E_5$  représentatif, (lieu de  $\infty^2$  points et de  $\infty^2 E_4$ ) correspondant par dualité à soi-même, le triangle fondamental définit en même temps un réseau de suites de droites dont les suites singulières sont celles formées par l'ensemble d'une droite du triangle et du paramètre correspondant. Chaque suite de points du premier réseau est en involution avec chaque suite de droites du deuxième.

---

## DEUX THÉORÈMES SUR LES ONDES PAR IMPULSION

PAR

M. Georges BOULIGAND (Poitiers).

---

1. — Considérons un liquide parfait pesant, primitivement au repos, dans un bassin à paroi fixe. Posons, pour ce liquide, le problème des ondes *par impulsion*, de manière à réaliser un champ initial de vitesses très faibles, mais SANS SOUCI DE SAVOIR SI CE CHAMP EST OU NON TOURBILLONNAIRE.

Nous allons démontrer les théorèmes suivants:

I. A l'ordre d'approximation consistant à regarder les termes non linéaires par rapport aux déplacements et aux vitesses