

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 29 (1930)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.

**Artikel:** SUR DES CYLINDROÏDES ASSOCIÉS A UN POINT D'UNE SURFACE  
**Autor:** Deaux, R.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-23252>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR DES CYLINDROÏDES ASSOCIÉS A UN POINT D'UNE SURFACE

PAR

R. DEAUX (Mons, Belgique).

La théorie de la courbure des lignes tracées sur une surface et celle des normales infiniment voisines conduisent à des cylindroïdes<sup>1</sup>. En se servant du calcul vectoriel et de la théorie générale des surfaces, M. K. KOMMERELL vient d'établir l'existence d'un cylindroïde « indicateur » des courbures normales<sup>2</sup>.

Le but du présent travail est de rattacher ces cylindroïdes à un même mode de génération. Nous y rencontrons un cylindroïde indicateur des torsions géodésiques et provenant de la formule d'EULER; celui de M. KOMMERELL s'obtient de la même manière à partir de la formule de O. BONNET.

1. — *Pour une normale quelconque contenant la normale  $n$  à une surface (S) en un point M ni ombilic ni parabolique, le point central O de  $n$  et le centre de courbure  $C_0$  en M de la section normale que détermine dans (S) le plan central de  $n$  sont conjugués dans l'involution ayant pour point central M et pour puissance le produit des rayons de courbure principaux  $R_1, R_2$  de (S) en M.*

Soient  $MT_1, MT_2$  les axes de l'indicatrice de DUPIN de (S);  $MT, MT_0$  deux tangentes conjuguées quelconques;  $MT', MT'_0$  les tangentes perpendiculaires à  $MT, MT_0$ ;  $C_1, C_2$  les centres de courbure en M des sections normales tangentes à  $MT_1, MT_2$ .

<sup>1</sup> Voir G. SCHEFFERS, *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie*, II, pp. 180-189, 209.

<sup>2</sup> *Journal f. d. r. u. a. Math.*, t. 161, pp. 113-122. Les équations vectorielles qui s'y trouvent sont utilisées en Belgique depuis plus de vingt ans, notamment celle de l'axe central. Voir F. BOUNY, *Leçons de Mécanique rationnelle*, I, p. 57.

Pour une normale dont la directrice tracée sur (S) est tangente en M à MT, la projectivité du faisceau des plans tangents d'axe  $n$  et de la ponctuelle des points de contact permet d'écrire <sup>1</sup>

$$n(T_2 T_1 T_0 T'_0) = (C_1 C_2 O \infty)$$

et, pour une normale dont la directrice est tangente en M à MT<sub>0</sub>,

$$n(T_2 T_1 T_0 T'_0) = (C_1 C_2 M C_0) .$$

L'égalité

$$(C_1 C_2 O \infty) = (C_1 C_2 M C_0)$$

entraîne l'involution

$$C_1 C_2 , M \infty , O C_0$$

et on a

$$MO \cdot MC_0 = MC_1 \cdot MC_2 = R_1 R_2 .$$

REMARQUE. — L'équation différentielle des *directrices des normales telles que la ligne de striction est le lieu des centres de courbure des sections normales déterminées par les plans centraux correspondants* s'obtient en exprimant que

$$\overline{MO}^2 = R_1 R_2$$

ou, suivant une formule classique <sup>2</sup>,

$$\left( \frac{\cos^2 \theta}{R_1} + \frac{\sin^2 \theta}{R_2} \right)^2 = R_1 R_2 \left( \frac{\cos^2 \theta}{R_1^2} + \frac{\sin^2 \theta}{R_2^2} \right)^2 ,$$

si  $\theta$  est l'angle (MT<sub>1</sub>, MT). Cette relation s'écrit

$$\operatorname{tg}^4 \theta = \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 .$$

En prenant pour lignes  $v = C^{\text{te}}$  et  $u = C^{\text{te}}$  les lignes de courbure tangentes à MT<sub>1</sub>, MT<sub>2</sub> on a

$$R_1 = \frac{E}{L} , \quad R_2 = \frac{G}{N} , \quad \operatorname{tg} \theta = \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{dv}{du}$$

<sup>1</sup> MANNHEIM, *Géométrie descriptive*, pp. 279, 300.

<sup>2</sup> Voir p. e. DEMARTRES, *Cours de Géométrie infinitésimale*, p. 245.

et l'équation différentielle est

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^4 = \frac{G^2 L^3}{E^2 N^3}$$

Lorsque  $\frac{R_2}{R_1}$  est constant, les lignes cherchées sont des trajectoires des lignes de courbure. Ainsi, si (S) est engendrée par la révolution d'une cycloïde autour de sa base, ces lignes sont les loxodromies inclinées de  $\text{arc tg} \sqrt[4]{\frac{1}{8}}$  sur les méridiens.

2.— Etant données sur deux droites gauches  $n$ ,  $i$  une ponctuelle ( $n$ ) et une involution ( $i$ ) projectives, les droites qui joignent les points de ( $n$ ) aux couples homologues de ( $i$ ) engendrent une surface cubique ( $S_3$ ) ayant  $n$  pour droite double et  $i$  pour droite simple; les points-pinces sont sur ( $n$ ) les homologues des points doubles de ( $i$ ). ( $S_3$ ) est un cylindroïde lorsque,  $i$  étant à l'infini dans un plan  $\mu$  normal à  $n$  en un point M, les points cycliques forment dans ( $i$ ) le couple homologue du point à l'infini de ( $n$ ).

Un point quelconque G de ( $n$ ) est fixé par MG et une droite quelconque MT du plan  $\mu$  est connue par son angle  $\theta$  avec une droite fixe de ce plan. La droite MT décrit une involution projective à ( $n$ ) si,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  étant des constantes, on a

$$MG(a' \text{tg}^2 \theta + b' \text{tg} \theta + c') = a \text{tg}^2 \theta + b \text{tg} \theta + c . \quad (1)$$

La ponctuelle ( $n$ ) est alors projective à l'involution ( $i$ ) marquée sur la droite à l'infini du plan  $\mu$  par l'involution des droites MT, et la parallèle  $g$  à MT menée par G engendre une surface cubique. Celle-ci est un cylindroïde si, pour MG croissant indéfiniment, les racines de (1) sont celles de

$$\text{tg}^2 \theta + 1 = 0 .$$

Il faut

$$a' = c' , \quad b' = 0$$

et la relation (1) est de la forme

$$MG = a \sin^2 \theta + b \sin \theta \cos \theta + c \cos^2 \theta . \quad (2)$$

Mais on sait que si on choisit pour droite fixe à partir de laquelle

se compte l'angle  $\theta$  l'une ou l'autre des droites doubles, rectangulaires d'ailleurs, de l'involution équilatère engendrée par les droites MT, le terme en  $\sin \theta \cos \theta$  disparaît et la relation (2) peut donc se ramener à la forme

$$MG = c \cos^2 \theta + a \sin^2 \theta . \quad (3)$$

Les points-pinces  $G_1, G_2$  et le point principal  $G_0$  du cylindroïde sont fournis par

$$MG_1 = c , \quad MG_2 = a , \quad MG_0 = \frac{a + c}{2} , \quad (4)$$

et si on pose

$$h = G_0 G_1 = MG_1 - MG_0 = \frac{c - a}{2} \quad (5)$$

il vient

$$G_0 G = G_0 M + MG = h \cos 2\theta . \quad (6)$$

3. — Soient  $G$  le pied de la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque  $D$  sur l'axe central  $g$  d'un complexe linéaire;  $\gamma, \delta$  les plans focaux de  $G, D$  dans l'espace focal qui définit le complexe. Le paramètre de celui-ci est

$$k = - \frac{GD}{\operatorname{tg}(\gamma\delta)} ,$$

si l'angle  $(\gamma\delta)$  est apprécié positivement dans le sens positif des rotations autour de l'axe arbitraire qui porte  $GD$ .

Dans le cylindroïde considéré (2), soit  $d$  l'une des génératrices s'appuyant sur  $n$  en un point quelconque  $D$ . Par le point  $D'$  symétrique de  $D$  par rapport à  $G_0$  passent deux génératrices  $d', d''$  dont l'une,  $d''$ , est orthogonale à  $d$ . Les génératrices  $d, d'$  sont dites *associées* parce qu'elles sont les directrices d'une congruence linéaire base d'un faisceau de complexes linéaires dont les axes centraux sont les génératrices du cylindroïde<sup>1</sup>. Si  $\varphi, \theta$  sont les angles que font les génératrices  $d, g$  (2) avec la génératrice torsale  $g_1$  issue du point-pince  $G_1$ , le paramètre du complexe d'axe  $g$  est

$$k = \frac{GD}{\operatorname{tg}(\theta + \varphi)}$$

<sup>1</sup> Voir REYE, *Geometrie der Lage*, II, éd. 1907, p. 142; Ch. MICHEL, *Compléments de Géométrie moderne*, p. 261.

ou, en vertu de la relation (6),

$$\begin{aligned} k &= (G_0 D - G_0 G) \cot(\theta + \varphi) = h(\cos 2\varphi - \cos 2\theta) \cot(\theta + \varphi), \\ k &= h(\sin 2\theta - \sin 2\varphi). \end{aligned} \quad (7)$$

Les valeurs extrêmes  $k_1, k_2$  de  $k$ , atteintes pour  $\theta = \frac{\pi}{4}$  ou  $-\frac{\pi}{4}$ , sont

$$k_1 = h(1 - \sin 2\varphi), \quad k_2 = -h(1 + \sin 2\varphi). \quad (8)$$

Si donc on compte les angles à partir de la droite  $g'_1$  obtenue en faisant tourner la droite  $g_1$  de  $\frac{\pi}{4}$ , et si on pose

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \theta', \quad \varphi = \frac{\pi}{4} + \varphi', \quad (9)$$

il vient

$$k_1 = h(1 - \cos 2\varphi'), \quad k_2 = -h(1 + \cos 2\varphi'). \quad (10)$$

$$k = h(\cos 2\theta' - \cos 2\varphi') = h[\cos^2 \theta' - \sin^2 \theta' - (\cos^2 \theta' + \sin^2 \theta') \cos 2\varphi'],$$

d'où la relation bien connue

$$k = k_1 \cos^2 \theta' + k_2 \sin^2 \theta'. \quad (11)$$

4. — Si  $p_g$  et  $p_d$  sont les paramètres de distribution des plans tangents au cylindroïde le long des génératrices  $g$  et  $d$  (3), on a

$$k = \frac{1}{2}(p_g - p_d). \quad (12)$$

En effet, si  $g_v$  est une génératrice infiniment voisine de  $g$ , qui s'appuie sur  $n$  en  $G_v$  et qui forme l'angle  $\theta_v$  avec la droite  $g_1$  (3), on a<sup>1</sup> en vertu de la relation (6)

$$p_g = - \lim \frac{GG_v}{\sin(\theta_v - \theta)} = - \lim h \frac{\cos 2\theta_v - \cos 2\theta}{\sin(\theta_v - \theta)} = 2h \sin 2\theta$$

et les égalités (7), (12) sont équivalentes.

Si sur la génératrice variable  $g$  on porte à partir de  $G$  et dans les deux sens deux segments égaux à  $|k|$ , leurs extrémités

<sup>1</sup> Voir *Enseignement mathématique*, XXVII<sup>e</sup> année, p. 294.

décrivent une courbe caractéristique du cylindroïde, de laquelle on déduit toutes les autres en faisant varier  $\varphi$ <sup>1</sup>. Si  $\varphi = 0$ , on a

$$k = \frac{1}{2} \rho_g .$$

Les plans tangents  $\varpi$  au cylindroïde aux points P de  $g$  tels que  $GP = \pm p_g$  sont inclinés de  $\frac{\pi}{4}$  sur l'axe  $n$ , car si  $\gamma$  est le plan tangent en G, on a<sup>2</sup>

$$p_g = \pm \frac{p_g}{\operatorname{tg}(\gamma\varpi)} .$$

Dés lors, si (C) est la ligne de contact du cylindroïde avec la développable circonscrite dont le cône directeur est de révolution autour de l'axe  $n$  du cylindroïde et a un angle au sommet de  $90^\circ$ , on obtient une courbe caractéristique en prenant l'homologue de (C) dans la projectivité gauche qui, réduisant les longueurs de moitié, a pour axes  $n$  et la droite à l'infini dans un plan normal à  $n$ .

Le lecteur pourra vérifier que l'arête de rebroussement de cette développable se projette orthogonalement sur le plan principal du cylindroïde suivant une astroïde<sup>3</sup> ayant le point principal  $G_0$  pour centre et dont les rebroussements sont situés sur les parallèles aux génératrices torsales, à une distance de  $G_0$  qui est double de la hauteur du cylindroïde.

5. — La relation (11) ayant la même forme que (3), si à partir d'un point quelconque, soit M, de  $n$  on porte  $MG_k = \lambda k$ ,  $\lambda$  étant une constante, la parallèle  $g_k$  menée par  $G_k$  à la génératrice  $g$  du cylindroïde ( $\Gamma$ ) considéré engendre un nouveau cylindroïde ( $\Gamma_k$ ).

On choisit sur ( $\Gamma_k$ ) deux génératrices associées dont l'une fait l'angle  $\psi'$  avec  $g'_1$  (3). En vertu des relations (5), (11), (10), on a

$$h_k = \frac{\lambda}{2} (k_1 - k_2) = \lambda h ,$$

<sup>1</sup> Voir R. STURM, *Liniengeometrie*, I, p. 166; K. ZINDLER, *id.*, I, p. 292.

<sup>2</sup> *Ens. Math.*, loc. cit.

<sup>3</sup> Pour la bibliographie de cette courbe, voir BROCARD et LEMOYNE, *Courbes géométriques remarquables*, pp. 38-48; G. LORIA, *Spezielle ebene Kurven*, I, pp. 265-270; WIELEITNER, *id.*, pp. 110 et suivantes.

de sorte que le paramètre  $z$  du complexe d'axe  $g_k$  et défini par les génératrices associées choisies est, par analogie avec l'expression (7) de  $h$ ,

$$z = \lambda h (\sin 2\theta' - \sin 2\psi')$$

ou, en repassant aux angles  $\theta$  et  $\psi$ ,

$$z = -\lambda h (\cos 2\theta - \cos 2\psi) . \quad (13)$$

Si on porte sur  $n$  un segment  $MG_z = \mu z$ ,  $\mu$  étant une constante, la parallèle à  $g_k$  menée par  $G_z$  engendre un troisième cylindroïde; celui-ci coïncide avec le premier ( $\Gamma$ ) si, quel que soit  $\theta$ , on a

$$MG = \mu z$$

ou, en vertu des relations (3), (5), (13), si

$$\left. \begin{aligned} \lambda \mu &= -1 \\ \cos 2\psi &= \frac{c+a}{c-a} \end{aligned} \right\} . \quad (14)$$

En supposant  $\lambda = -1$  et  $\mu = 1$ , on a le théorème remarquable suivant: *Soient M un point fixe choisi arbitrairement sur la droite double  $n$ , orientée arbitrairement, d'un cylindroïde ( $\Gamma$ );  $g$  une génératrice variable s'appuyant sur  $n$  en  $G$ ;  $d, d'$  deux génératrices associées quelconques mais fixes;  $k$  le paramètre du complexe linéaire d'axe  $g$  et admettant  $d, d'$  pour droites conjuguées;  $g_k$  la parallèle à  $g$  menée par le point  $G_k$  tel que  $MG_k = -k$ . Dans le cylindroïde ( $\Gamma_k$ ) engendré par  $g_k$ , il est possible de choisir deux génératrices associées et conjuguées dans le complexe d'axe  $g_k$  pour que le paramètre de celui-ci soit, en grandeur et en signe, la valeur algébrique du segment  $MG$ .*

Chacun des cylindroïdes est un indicateur des paramètres des complexes d'un faisceau lié à l'autre, mais avec changement de signe pour l'un d'eux. On voit aisément qu'une courbe caractéristique (4) sur l'un permet d'en construire une pour l'autre.

6. — La forme de la relation (3) conduit naturellement à examiner les formules d'EULER et de BONNET relatives aux courbures normales et aux torsions géodésiques en un point  $M$  non

ombilic d'une surface (S) (1). Le théorème du n° 5 montrera d'ailleurs que le cylindroïde amené par l'une de ces formules conduit forcément à la considération de celui qui est lié à l'autre.

En désignant maintenant par  $\theta$  l'angle de MT et de  $MT_1$ , et par C le centre de courbure en M de la section normale tangente à MT, on a,  $\lambda$  étant une constante,

$$\frac{\lambda}{MC} = \frac{\lambda}{R_1} \cos^2 \theta + \frac{\lambda}{R_2} \sin^2 \theta . \quad (15)$$

Donc (2) si sur la normale  $n$  en M à (S) on porte en MG la courbure  $\frac{1}{MC}$ , multipliée par une constante  $\lambda$ , de la section normale tangente à une tangente variable MT de (S), la parallèle  $g$  menée à MT par G engendre un cylindroïde ( $\Gamma_\lambda$ ) qui contient les tangentes principales à (S) en M, et dont les points pincés  $G_1, G_2$  sont obtenus à l'aide des sections principales.

COROLLAIRES. 1° Soit C' le centre de courbure en M d'une deuxième section normale. Si on prend  $\lambda = MC \cdot MC'$ , on a le théorème: *Etant données deux tangentes quelconques MT, MT' à (S), les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque sur les tangentes principales en M et sur les parallèles à MT, MT' menées respectivement par les centres de courbure C', C en M des sections normales tangentes à MT', MT sont quatre points coplanaires, car la podaire de ( $\Gamma_\lambda$ ) pour un point quelconque est une ellipse*

2° Si  $\lambda = R_1 R_2$ , G est le point central de  $n$  pour une normale admettant le plan central  $nT$  (1); la droite  $g$ , normale au plan asymptote de  $n$ , l'est aussi à la génératrice infiniment voisine de  $g$ . Donc, si M n'est pas parabolique, la perpendiculaire à  $n$  et aux normales de (S) infiniment voisines de  $n$  engendrent un cylindroïde ( $\Gamma_{R_1 R_2}$ ) ayant pour génératrices torsales les parallèles à  $MT_1, MT_2$  menées par  $C_1, C_2$ ; il contient les tangentes principales en M (SCHEFFERS, p. 209).

3° Si  $\lambda = 1$ , l'inverse de  $g$  dans l'inversion de pôle M et de puissance 1 est la circonférence de diamètre MC et située dans le plan Mg; tournée de  $90^\circ$  autour de  $n$ , elle devient le lieu des centres de courbure en M des lignes tracées sur (S) et tangentes à

MT. Par suite, si sur la normale principale en M à toute ligne tracée sur (S) on porte la courbure de cette ligne, le point obtenu décrit un cylindroïde ( $\Gamma'_1$ ) (SCHEFFERS, p. 189).

Si on porte au contraire le quotient de cette courbure par la courbure totale de (S) en M, on obtient un cylindroïde qui, tourné de  $90^\circ$  autour de n, coïncide avec le cylindroïde ( $\Gamma_{R_1 R_2}$ ).

4° Les axes de courbure en M des sections normales de (S) engendrent la surface cubique qui est la polaire réciproque du cylindroïde ( $\Gamma_{R_1 R_2}$ ) par rapport à la sphère de centre M et dont le carré du rayon est  $R_1 R_2$  (1).

5° Pour le cylindroïde ( $\Gamma_1$ ) répondant à  $\lambda = 1$ , on a, par les relations (5), (7), (15)

$$k = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) (\sin 2\theta - \sin 2\varphi) .$$

En choisissant  $\varphi = 0$ , on voit que: La parallèle g menée à une tangente variable MT par le point G obtenu en portant sur la normale n, à partir de M, un segment égal à la courbure normale relative à la direction MT, engendre un cylindroïde ( $\Gamma$ ) dont les génératrices torsales  $g_1, g_2$  sont parallèles à  $MT_1, MT_2$ . Le paramètre du complexe linéaire d'axe g et conjugué aux droites  $g_1, g_2$  est la torsion géodésique relative à la direction MT.

Par suite (5) si on porte sur n à partir de M un segment  $MG_k$  égal à la torsion géodésique changée de signe et relative à la direction MT, la parallèle  $g_k$  menée par  $G_k$  à MT engendre un cylindroïde ( $\Gamma_k$ ). Si on choisit sur celui-ci deux génératrices associées dont l'une fait avec  $g_1$  l'angle réel ou imaginaire  $\psi$  donné par

$$\cos 2\psi = \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1}$$

le paramètre du complexe d'axe  $g_k$  et conjugué à ces génératrices est la courbure normale relative à MT. C'est le théorème de M. KOMMERELL.

4 février 1930.

Ecole des Mines de Mons.