

LA SPHÈRE DE LONGCHAMPS : UNE DÉFINITION

Autor(en): **Altshiller-Court, Nathan**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **29 (1930)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-23249>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

LA SPHÈRE DE LONGCHAMPS : UNE DÉFINITION

PAR

Nathan ALTSHILLER-COURT (Oklahoma, E.-U.).

1. — On a maintes fois remarqué que la géométrie du tétraèdre est loin d'avoir atteint le même degré de développement que celle du triangle. G. DE LONGCHAMPS en a donné la raison suivante¹: « Le tétraèdre possède quatre sommets et six arêtes. Or, avec quatre lettres A, B, C, D, on ne saurait, par une permutation circulaire, produire six combinaisons. Les arêtes du tétraèdre... ne peuvent donc être obtenues de cette façon ». Comme un obstacle d'une autre nature cet auteur a cité « l'absence, dans le tétraèdre, d'éléments tels que l'orthocentre, la sphère conjuguée, etc. ». De ses observations il conclut que « les analogies entre les deux géométries, celle du triangle et celle du tétraèdre, ne sauraient être recherchées avec un succès relatif que pour certains tétraèdres d'un genre particulier ».

On peut ajouter que ces analogies, même quand elles existent, sont cachées par le fait que dans un élément d'un triangle se confondent souvent plusieurs éléments du tétraèdre. A un côté du triangle, pour en citer un exemple, correspondent dans le tétraèdre l'aire d'une face aussi bien que le périmètre de cette face.

2. — On se heurte à toutes ces difficultés quand on cherche à étendre au tétraèdre les notions établies pour le triangle. Comme exemple considérons une question discutée par de Longchamps lui-même.

¹ *Mathesis*, 1890, p. 49 et suivantes.

Cet auteur était le premier à attirer l'attention sur le cercle orthogonal aux trois cercles (A, a) , (B, b) , (C, c) ayant comme centres les sommets A, B, C d'un triangle ABC et comme rayon les côtés opposés respectifs. Il a établi un bon nombre de propriétés intéressantes de ce cercle ¹, qu'on a nommé « le cercle de Longchamps ».

Il est naturel de se demander si le tétraèdre a une sphère analogue, une « sphère de Longchamps ». Les sommets A, B, C, D du tétraèdre $ABCD$ sont tout indiqués comme centres des quatre sphères analogues aux cercles (A, a) , (B, b) , (C, c) . Mais il est beaucoup moins clair de décider ce qu'il faudrait prendre comme rayons de ces sphères.

3. — Pour parer à la difficulté on peut chercher à généraliser le cercle de Longchamps en partant d'une autre propriété *caractéristique* de ce cercle. Comme telle on peut prendre la propriété que le cercle de Longchamps d'un triangle ABC est le cercle conjugué au triangle anticomplémentaire de ABC ².

Le tétraèdre anticomplémentaire $A'B'C'D'$ du tétraèdre $ABCD$ n'a de sphère conjuguée que si $A'B'C'D'$ est un tétraèdre orthocentrique. Or, les deux tétraèdres $ABCD, A'B'C'D'$ étant homothétiques, il doit donc en être de même du tétraèdre donné $ABCD$. On voit ainsi que s'il peut y avoir question d'une sphère de Longchamps associée au tétraèdre, ce tétraèdre ne peut être le tétraèdre général, mais le tétraèdre orthocentrique, résultat qui confirme les réflexions de Longchamps citées plus haut.

4. — Soient donc $ABCD$ un tétraèdre orthocentrique, $A'B'C'D'$ son tétraèdre anticomplémentaire, (H') la sphère conjuguée par rapport à $A'B'C'D'$. Cherchons maintenant le rayon de la sphère (A) ayant pour centre le sommet A et orthogonale à (H') .

La sphère (H') est coupée par la face $B'C'D'$ de $A'B'C'D'$ suivant le cercle (H'_a) conjugué par rapport au triangle $B'C'D'$.

¹ *Journal de Mathématiques spéciales*, 1886, pp. 57, etc.

² Nathan ALTSHILLER-COURT, On the de Longchamps circle of the triangle. *American Mathematical Monthly*, 1926, pp. 368, etc. J. M. S., *ibid.*

Le point A étant le centre de gravité de B' C' D', on a, en désignant par α , B'_h , C'_h , D'_h les puissances des points A, B', C', D' par rapport à (H'_a) ¹,

$$\alpha = \frac{1}{9} (B'_h + C'_h + D'_h) = \frac{1}{18} (B' C'^2 + C' D'^2 + D' B'^2) .$$

Le rapport d'homothétie des deux tétraèdres ABCD, A' B' C' D' étant égal à --- 1:3, on a $B' C'^2 = 9BC^2$, etc., donc

$$\alpha = \frac{1}{2} (BC^2 + CD^2 + DB^2) . \quad (1)$$

Or, la puissance du point A par rapport au cercle (H'_a) est aussi la puissance de A par rapport à la sphère (H'_a) , donc α est le carré du rayon de la sphère (A).

5. — Soient (H) la sphère conjuguée par rapport à ABCD, et B_h , C_h , D_h les puissances des points B, C, D par rapport à (H). Or B_h , C_h , D_h sont aussi les puissances des points B, C, D par rapport au cercle d'intersection (H_a) de (H) avec le plan BCD, car le triangle BCD est conjugué par rapport à (H_a) . Par conséquent (1) devient²

$$\alpha = B_h + C_h + D_h . \quad (2)$$

En vertu de la formule (2) et de ses trois formules analogues on peut définir la sphère de Longchamps comme il suit: *On considère les quatre sphères ayant chacune comme centre un sommet d'un tétraèdre orthocentrique et comme carré du rayon la somme des puissances des trois autres sommets par rapport à la sphère conjuguée au tétraèdre. La sphère orthogonale à ces quatre sphères est, par définition, la sphère de Longchamps du tétraèdre.*

6. — Pour mettre en évidence que cette définition de la sphère de Longchamps du tétraèdre orthocentrique (5) est bien l'analogue

¹ Nathan ALTSHILLER-COURT, Sur le cercle conjugué par rapport à un triangle. *Mathesis*, 1928, p. 158.

² *Mathesis*, ibid.

de celle du cercle de Longchamps du triangle, il suffit d'observer que le carré d'un côté d'un triangle est égal à la somme des puissances des sommets situés sur ce côté par rapport au cercle conjugué au triangle considéré¹, de sorte que la définition du cercle de Longchamps peut se mettre sous la forme suivante: *On considère les trois cercles ayant chacun comme centre un sommet d'un triangle et comme carré du rayon la somme des puissances des deux autres sommets par rapport au cercle conjugué du triangle. Le cercle orthogonal à ces trois cercles est, par définition, le cercle de Longchamps du triangle.*

7. — Il suit des considérations précédentes que la sphère de Longchamps ainsi définie (5) a une autre propriété caractéristique analogue à celle du cercle de Longchamps (3, 4). On démontre facilement que le centre H' de la sphère de Longchamps d'un tétraèdre orthocentrique ABCD est le symétrique de l'orthocentre de ABCD par rapport au centre de la sphère circonscrite de ABCD, propriété analogue à celle du cercle de Longchamps.

Dans une note ultérieure je me propose de rechercher jusqu'à quel point cette analogie peut se poursuivre.

¹ *Mathesis*, *ibid.*, p. 156.