SUR LE NOMBRE e.

SUR LE NOMBRE e.

PAR

M^lle^ Hanni GREMINGER (Zurich).

Les lignes suivantes [1] apportent une modification que je crois nouvelle à la démonstration donnée par HERMITE [2] pour la transcendance du nombre e. Je reprendrai et je suivrai la démonstration d'Hermite jusqu'au point final, où il s'agit de prouver qu'un certain déterminant est différent de zéro; c'est ce point essentiel que j'établirai d'une manière entièrement différente de celle d'Hermite.

La démonstration d'Hermite se base sur l'approximation *arithmétique* simultanée des nombres

$$e\,,\ e^2\,,\ e^3\,,\ \dots\ e^n\,,$$

c'est-à-dire sur l'approximation de ces nombres par des nombres rationnels de même dénominateur. Hermite déduit cette approximation de l'approximation *algébrique* simultanée des fonctions

$$e^x\,,\ e^{2x}\,,\ e^{3x}\,,\ \dots\ e^{nx}\,,$$

c'est-à-dire de l'approximation de ces fonctions par des fonctions rationnelles de même dénominateur.

1. On obtient l'approximation algébrique en question en partant de la formule

$$x^{M+1}e^{\nu x}\int_0^{\nu} e^{-xz}F(z)\,dz = e^{\nu x}[F(0)x^M + F'(0)x^{M-1} + \dots + F^{(M)}(0)] - [F(\nu)x^M + F'(\nu)x^{M-1} + \dots + F^{(M)}(\nu)]\,, \qquad (1)$$

[1] Extrait d'une conférence faite au séminaire mathématique de l'Ecole polytechnique fédérale, le 17 mai 1930.

[2] Charles HERMITE: *Sur la fonction exponentielle*, Œuvres (Paris, 1912), t. III, p. 150.

où $F(z)$ désigne un polynôme quelconque de degré M et où nous prendrons plus tard $\nu = 1, 2, 3, \dots n$. On vérifie (1) par une application répétée de l'intégration par parties.

Le degré des polynômes en x au second membre de (1) s'abaisse, si $F(z)$ a des racines multiples aux points $x = 0$ et $x = \nu$. En tenant compte de ce fait, remplaçons $F(z)$ successivement par les $n + 1$ fonctions différentes suivantes:

$$F_0(z)\,,\ F_1(z)\,,\ F_2(z)\,,\ \dots\ F_n(z)\,,$$

où

$$F_s(z) = \frac{f(z)^\mu}{z - s} \qquad (s = 0\,,\,1\,,\,2\,,\dots n)\,, \tag{2}$$

$$f(z) = z(z-1)(z-2)\dots(z-n) \tag{3}$$

et où μ est un entier positif; $F_s(z)$ est alors de degré

$$M = \mu(n+1) - 1\,.$$

Avec ce choix de $F(z)$ et en décomposant $\int\limits_0^\nu$ en $\int\limits_0^\infty - \int\limits_\nu^\infty$, la formule (1) devient

$$\frac{x^{\mu(n+1)}e^{\nu x}}{(\mu-1)\,!}\int\limits_0^\nu e^{-xz}F_s(z)\,dz = P_{s0}(x)\,e^{\nu x} - P_{s\nu}(x) \tag{4}$$

où

$$P_{s\nu}(x) = \frac{x^{\mu(n+1)}e^{\nu x}}{(\mu-1)\,!}\int\limits_\nu^\infty e^{-xz}F_s(z)\,dz$$

$$= \frac{F_s^{(\mu-1)}(\nu)\,x^{\mu n} + F_s^{(\mu)}(\nu)\,x^{\mu n-1} + \dots + F_s^{(\mu(n+1)-1)}(\nu)}{(\mu-1)\,!} \tag{5}$$

$$(s = 0\,,\,1\,,\,2\,,\dots n\,,\qquad \nu = 0\,,\,1\,,\,2\,,\dots n)\,.$$

Observons que les coefficients du polynôme $P_{s\nu}(x)$ sont des entiers, parce que multiples de certains coefficients du polynôme $F_s(\nu + x)$.

La fonction rationnelle $P_{s\nu}(x)\,/\,P_{s0}(x)$ donne l'approximation algébrique de $e^{\nu x}$ dont il a été question, les séries de Maclaurin de $P_{s\nu}(x)\,/\,P_{s0}(x)$ et de $e^{\nu x}$ ayant les mêmes coefficients jusqu'à celui de $x^{\mu(n+1)-1}$ inclusivement.

2. On obtient l'approximation arithmétique de e, e^2, ... e^n en prenant $x = 1$ dans (4). Cette formule donne pour $x = 1$ et $\nu = 1, 2, 3, \dots n$

$$\begin{aligned} P_{s0}\, e - P_{s1} &= \varepsilon_{s1} \\ P_{s0}\, e^2 - P_{s2} &= \varepsilon_{s2} \\ \dots & \dots \\ P_{s0}\, e^n - P_{sn} &= \varepsilon_{sn} \end{aligned} \tag{6}$$

où nous avons posé

$$P_{s\nu} = P_{s\nu}(1) = \frac{e^\nu}{(\mu - 1)!} \int_\nu^\infty e^{-z} \frac{f(z)^\mu}{z - s}\, dz \,, \tag{7}$$

$$\varepsilon_{s\nu} = e^\nu \int_0^\nu e^{-z} \frac{f(z)}{z - s} \frac{f(z)^{\mu-1}}{(\mu - 1)!}\, dz \,, \tag{8}$$

$$(s = 0, 1, 2, \dots n, \qquad \nu = 0, 1, 2, \dots n) \,,$$

(7) et (8) découlent de (2) et (5).

Les nombres $P_{s\nu}$ sont des *entiers.* Les nombres $\varepsilon_{s\nu}$ *tendent vers zéro* pour $\mu \to \infty$ comme le $(\mu - 1)$ième terme d'une série exponentielle, voir (8). La fraction rationnelle $P_{s\nu} / P_{s0}$ donne l'approximation arithmétique de e^ν que nous allons utiliser.

3. Pour décider si e est algébrique ou transcendant, il s'agit de voir s'il est possible ou non d'avoir une relation de la forme

$$N_0 + N_1 e + N_2 e^2 + \dots + N_n e^n = 0 \tag{?}$$

où N_0, N_1, N_2, ... N_n sont des *entiers, qui ne sont pas tous nuls.*

Multiplions les équations (6) par N_1, respectivement par N_2, ... N_n, et ajoutons-les à l'équation triviale

$$P_{s0} - P_{s0} = 0$$

multipliée par N_0. En supposant la relation hypothétique (?) nous obtenons

$$P_{s0} N_0 + P_{s1} N_1 + \dots + P_{sn} N_n = -(\varepsilon_{s1} N_1 + \varepsilon_{s2} N_2 + \dots + \varepsilon_{sn} N_n) \tag{9}$$

Le premier membre représente un nombre entier quel que soit l'entier positif μ, qui est entré dans nos calculs par (2) et qui est resté indéterminé jusqu'ici. Mais si μ tend vers l'infini, le second membre de (9) tend vers zéro; dès que nous sommes assurés que le module de ce second membre est inférieur à 1, nous savons qu'il est, étant entier, exactement égal à 0. Ainsi nous obtenons, pour μ suffisamment grand,

$$P_{s0}N_0 + P_{s1}N_1 + P_{s2}N_2 + \dots + P_{sn}N_n = 0 \,. \tag{10}$$

Nous pouvons prendre $s = 0, 1, 2, \dots n$ dans (10) et ainsi nous obtenons un système de $n + 1$ équations linéaires et homogènes pour les $n + 1$ entiers $N_0, N_1, \dots N_n$, regardés comme inconnues. Si nous savions que le déterminant

$$|P_{s\nu}| \qquad (s, \nu = 0, 1, \dots n) \tag{11}$$

de ces équations est différent de 0, les équations (10) ne posséderaient que la solution triviale zéro; une relation de la forme (?) n'aurait lieu que pour $N_0 = N_1 = N_2 = \dots = N_n = 0$. Nous démontrerons que le nombre e est transcendant en montrant que le déterminant (11) est différent de 0.

4. Si le déterminant (11) était égal à 0, on pourrait trouver des constantes réelles $u_0, u_1, u_2, \dots u_n$, qui ne seraient pas toutes nulles, et qui satisferaient aux $n + 1$ équations qu'on obtient de

$$P_{0\nu}u_0 + P_{1\nu}u_1 + P_{2\nu}u_2 + \dots + P_{n\nu}u_n = 0 \tag{12}$$

en mettant $\nu = 0, 1, 2, \dots n$. Tenant compte de (7), nous pouvons écrire (12), après l'avoir divisé par le facteur $e^{\nu} / (\mu - 1)\,!$

$$\int_{\nu}^{\infty} e^{-z} f(z)^{\mu} \left[\frac{u_0}{z} + \frac{u_1}{z-1} + \dots + \frac{u_n}{z-n}\right] dz = 0 \,. \tag{13}$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \dots n)$$

Nous considérons la fonction

$$\Phi(x) = \int_{x}^{\infty} e^{-z} f(z)^{\mu} \left[\frac{u_0}{z} + \frac{u_1}{z-1} + \dots + \frac{u_n}{z-n}\right] dz \,.$$

En vertu de (13) on a

$$\Phi(0) = \Phi(1) = \Phi(2) = \ldots = \Phi(n) = 0$$

et en outre

$$\lim_{x \to \infty} \Phi(x) = 0 .$$

Le théorème de Rolle généralisé nous dit qu'il existe entre les $n + 2$ zéros réels de la fonction continue $\Phi(x)$ au moins $n + 1$ zéros de sa dérivée:

$$\Phi'(x) = - e^{-x} f(x)^{\mu} \left[\frac{u_0}{x} + \frac{u_1}{x-1} + \ldots + \frac{u_n}{x-n} \right] ,$$

ces zéros de la dérivée étant différents des zéros de $\Phi(x)$: $0, 1, 2, \ldots n, \infty$.

Le facteur $e^{-x} f(x)^{\mu}$ ne s'annule qu'aux zéros de $\Phi(x)$; il faut donc que le facteur restant

$$\frac{u_0}{x} + \frac{u_1}{x-1} + \ldots + \frac{u_n}{x-n}$$

possède tous ces $n + 1$ zéros intermédiaires. Il s'en suit, puisque le numérateur de cette fonction rationnelle est au plus de degré n, que

$$\frac{u_0}{x} + \frac{u_1}{x-1} + \ldots + \frac{u_n}{x-n} \equiv 0 ;$$

et de cela on tire que nécessairement

$$u_0 = u_1 = \ldots = u_n = 0 .$$

On a donc

$$| P_{s,\nu} | \neq 0 ,$$

c'est-à-dire qu'une relation non triviale de la forme (?) est impossible; e est transcendant.

Il me reste encore à dire que cette démonstration, aussi simple qu'elle soit dans le cas où les exposants de e sont des nombres réels, ne conduit plus au but pour des exposants complexes. La méthode par laquelle Hermite a démontré que le déterminant $|P_{s,\nu}|$ est différent de zéro est, au contraire, indépendante de la réalité des exposants.