RÉFLEXIONS SUR LES INFINIMENT PETITS ET LES DIFFÉRENTIELLES

RÉFLEXIONS SUR LES INFINIMENT PETITS ET LES DIFFÉRENTIELLES

PAR

M. R. Tambs Lyche, Trondhjem (Norvège).

A propos d'un article de M. Winants.

Dans le deuxième fascicule du tome 28 de *L'Enseignement Mathématique*, on trouve un très intéressant article de M. Winants: *Réflexions sur l'Enseignement du Calcul infinitésimal.* L'auteur déclare que « la question des infiniment petits semble être une des plus épineuses de toute l'analyse; elle intervient dans de multiples questions que l'on ne réussit pas sans peine à rendre cohérentes ».

Qui s'est occupé à exposer, aux débutants, le Calcul infinitésimal consentira sans doute que l'emploi du terme « infiniment petit » exige des précautions extraordinaires pour ne pas perturber l'esprit de l'étudiant. Je vais même jusqu'à supposer que nulles précautions n'empêcheront le débutant de suivre sa fantaisie dans les régions du mysticisme, évoquées par ce mot « infini ». M. Winants s'efforce, dans son article, d'éviter certaines difficultés, notamment dans l'introduction des différentielles secondes, en suivant un procédé dû à M. Jacques Deruyts.

Or, il me semble que la difficulté envisagée par M. Winants n'existe pas en réalité, ce que je chercherai d'abord à mettre en évidence. De plus, je vais proposer la seule solution radicale de toutes les questions « épineuses » découlant de l'emploi des infiniment petits: de ne pas en faire usage.

* * *

La difficulté concernant les différentielles secondes découle du passage de la formule fondamentale

$$dy = y'\,dx \qquad (1)$$

à la formule

$$d^2y = y''\,dx^2 \qquad (2)$$

par différentiation. Reprenons les incohérences dont il s'agit:

« 1. Les infiniment petits sont des quantités essentiellement variables;

2. Les différentielles sont des infiniment petits;

3. L'on posera $dx =$ constante.

La troisième proposition jure évidemment avec les deux autres. »

Considérons la formule (1), y est une fonction de x admettant une dérivée qu'on a appelée y'. La différentielle dy d'une telle fonction a été *définie* par la formule

$$dy = y'\,\Delta x \qquad (3)$$

en entendant par Δx une quantité tout-à-fait quelconque. On obtient alors, par des considérations qui ne nous intéressent pas ici, la formule (1).

On se propose maintenant de calculer la différentielle de la quantité dy. Il faut pour cela que dy soit une fonction de x admettant une dérivée. Or, dy est une fonction de deux variables indépendantes, x et Δx. Peut-on alors employer la formule (1) ? Sans doute. La définition (3) de la différentielle ne perd pas du tout son sens parce que la fonction y dépend — outre que de x — d'autres quantités variables. Elle exige seulement que y, considérée comme fonction de x, admette une dérivée. On peut, par exemple, très bien calculer la différentielle dy de la fonction

$$y = ax^2$$

dépendant de x et de a, en la considérant comme fonction de x

pendant les opérations en question. Pour toute valeur particulière de a on aura la différentielle

$$dy = 2ax\Delta x$$

qui s'obtient par la formule (3) en effectuant le calcul *comme si* a *était une constante*. Or, dans (1) nous avons, à droite, le produit $y' dx$. Ici y' est une fonction de x que nous supposons dérivable; le facteur $dx = \Delta x$ est indépendant de x; cela ne nous regarde pas, pour le problème qui nous occupe, qu'il soit variable ou non. Nous avons à calculer la différentielle de $y' dx$ comme fonction de x. Et cela donne

$$d(dy) = (y' dx)' dx = y'' dx^2 .$$

Considérons la formule (F) de M. Winants

$$d(dy) = d^2 y + y' . d(dx) \tag{F}$$

obtenue en appliquant à la formule (1) la règle de différentiation d'un produit. Or, pour appliquer cette règle, il faut d'abord se poser la question suivante: les facteurs à droite dans (1), sont-ils des fonctions de x admettant des dérivées ? La réponse sera: le premier dépend de x (en général) et admet la dérivée y''; le second est indépendant de x et, considéré comme fonction de x, sa dérivée est identiquement zéro. Alors le dernier terme dans (F) disparaîtra, puisque

$$d(dx) = (dx)' dx = 0 .$$

Alors, que dire sur les propositions 1°, 2° et 3°, dont la troisième jure évidemment avec les deux autres ? La réponse est immédiate *on ne pose pas* dx = constante ! On applique une règle pour le calcul des dérivées, selon laquelle la dérivée du produit $y' dx$ s'obtient en considérant *dx comme si elle était constante*, puisqu'elle ne dépend pas de x.

C'est une analogie du cas suivant:

1'. Soit y une fonction de x définie par l'équation $f(x, y) = 0$.

2'. La dérivée y' se tire de l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} . y' = 0 .$$

3'. La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ s'obtient en posant y = constante, etc.

La troisième proposition jure évidemment avec la première, puisqu'on ne peut pas faire varier x pour obtenir la dérivée sans faire varier y. La contradiction est levée si l'on remplace les derniers mots par « en effectuant le calcul comme si y était une constante ».

* * *

Retournons à la formule (F) de M. Winants. On a défini

$$dy = y' \Delta x \ , \qquad d^2y = y'' \Delta x^2 \quad .$$

en entendant par Δx une quantité entièrement quelconque. Or, si x n'est pas la variable indépendante, on entendra, en général, par Δx l'accroissement de la fonction x causé par l'accroissement Δt de la variable indépendante t. Il me semble qu'on s'embrouillera dans de nouvelles difficultés en insistant sur l'équation $dx = \Delta x$ si x n'est plus la variable indépendante, sans quoi je ne comprends pas comment on peut admettre la formule (F).

* * *

Envisageons alors la question des infiniment petits. « En mathématiques, on appelle infiniment petit toute quantité variable qui tend vers zéro ». Cherchons à analyser ce qu'on veut obtenir en introduisant ce terme. Je suppose que tout mathématicien, digne de ce nom, désire éviter tout le mysticisme qu'on a longtemps mêlé au terme « infiniment petit ». Alors, ce qui reste est une question d'économie: 1° économie des mots; 2° économie qu'on peut obtenir par des expressions qui mènent l'intuition dans la direction désirée. Quant à ce dernier point, il me semble que le terme en question soit peu heureux, vu qu'il mène l'intuition dans une direction que l'on veut éviter.

L'économie des mots que peut rendre le terme " infiniment petit » existe sans doute. Mais il ne faudrait pas l'exagérer. « Quantité qui tend vers zéro » n'est pas un terme tellement long qu'il faut — à tout prix — le remplacer par un autre.

Au lieu d'introduire le terme « infiniment petit », je tiens donc à n'employer, quand il s'agit de l'enseignement des débutants, que les considérations des limites. Le cours élémentaire *terminé*, je crois utile cependant d'exposer ce que comporte l'usage du terme infiniment petit, parce que l'étudiant rencontrera certainement ce terme dans les applications. Si sa préparation en mathématiques lui a fourni une solide connaissance des considérations de l'analyse, il comprendra d'une manière convenable ce qui est contenu sous ces mots.

En éliminant ce fameux terme de l'analyse, les différentielles dx et dy seront dépouillées de tout ce qui peut alimenter le penchant au mysticisme — elles deviendront des quantités comme toutes les autres; dx est une quantité tout-à-fait quelconque, et dy une quantité liée à dx par l'équation (1) — pourvu qu'on mette toujours la définition (3) à la base de ces considérations.

Certains auteurs suivent une autre voie, en considérant $\frac{dy}{dx}$ comme un seul symbole équivalent à y'. Pour ne pas devoir renoncer aux avantages indiscutables liés à l'usage des différentielles, ces auteurs considèrent dx et dy comme des symboles dépourvus de sens, en affirmant seulement qu'on puisse, dans beaucoup de cas, effectuer des calculs *comme si* dx *et* dy *étaient des quantités*. (Voir p. ex. R. Courant: *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung* I, p. 80.) Il me semble qu'on sorte, par ce procédé, d'une difficulté pour se plonger dans une autre: 1° il serait extrêmement déplorable, si l'on était vraiment obligé, au début même de l'Analyse, d'introduire une espèce de calcul symbolique en écrivant des équations dont les termes ne seraient pas des quantités; 2° il aurait fallu préciser exactement — en donnant les démonstrations — *quels* calculs symboliques étaient admissibles, et non se borner à des termes vagues, comme « dans beaucoup de cas ».

* * *

L'économie indiscutable que comporte l'usage des différentielles, et qui est la raison pour les conserver dans l'Analyse, consiste, comme le remarque aussi M. Winants, avant tout, dans la règle de permanence: l'équation (1) reste vraie, même si x n'est pas la variable indépendante.

Pour les différentielles secondes, cette règle de permanence ne subsiste plus, ce qui fait surgir la question suivante: devrait-on introduire les différentielles supérieures dans l'analyse ? Il me semble qu'on puisse donner des raisons assez graves contre l'introduction de symboles désignant ces quantités, raisons qui viennent de la non-existence de la permanence. Puisque $d^2 y$ n'a de sens précis que par rapport à la variable indépendante x, on court souvent le risque d'employer le même symbole $d^2 y$ pour désigner des quantités différentes, en passant d'une variable indépendante à une autre. Dans les expressions

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 y}{dt^2}$$

d^2y désigne des quantités tout-à-fait différentes. La chose est la même que pour les dérivées partielles: les symboles

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

ont seulement la forme de fractions, mais ce sont des symboles indivisibles, où le « numérateur » et le « dénominateur » n'ont pas de sens. Par la même raison: ∂z n'indiquerait pas la quantité qui a été considérée comme variable. Il me semble donc qu'on éviterait des difficultés assez graves si l'on renonçait à introduire des symboles désignant les différentielles secondes. Pour plus de commodité, on pourrait néanmoins utiliser le symbole $\frac{d^2 y}{dx^2}$ comme équivalent à y'' et pour mettre en évidence la variable indépendante pendant le calcul de la dérivée. L'introduction de ce symbole serait suivie d'une digression historique pour expliquer le symbole. (On pourrait opposer les mêmes raisons contre le symbole y'', c'est vrai, mais ce symbole n'est qu'une écriture abrégée qu'on ne permettra que si aucune confusion n'est à craindre).

* * *

Je voudrais terminer ces réflexions par quelques mots sur le terme « quantité variable ». Toute équation en mathématiques, de l'espèce qui nous occupe, exprime une relation entre des *nombres*. Une équation contenant des « variables » est une équation vérifiée si les lettres représentant ces « variables » sont remplacées, une fois par *un* nombre, une autre fois par un autre nombre, etc. Cela veut dire, que les « variables » ne « varient » point. Ce sont plutôt des quantités « libres », dans le sens de « quantités dont on peut choisir à volonté la valeur parmi les valeurs appartenant à un certain ensemble ». Qu'est-ce qu'on entend alors par une « quantité variable qui tend vers zéro » ? Si elle est « essentiellement variable », il me semble que ce soit un phénomène de physique plutôt que de mathématiques. En mathématiques, la lettre x peut désigner, *ou* le nombre 1, *ou* le nombre 2, *ou* le nombre 3, etc. Mais elle ne peut pas représenter tous ces nombres *à la fois*. Si cela est vrai, l'expression « x tend vers a » n'a pas de sens précis. Au contraire, l'expression « y tend vers b lorsque x tend vers a » remplace celle-ci: étant donné un nombre positif quelconque ε, on peut désigner un autre nombre positif η tel que $|y - b|$ se trouve inférieur à ε si l'on choisit pour x un nombre pour lequel $|x - a|$ est inférieur à η. Il n'y a pas, dans cette expression, de quantités qui « varient ».

Je ne tiens pas à enlever de l'analyse le mot « variable » — expression qui s'y est trop profondément enracinée — mais il me semble qu'il serait utile de se rendre compte qu'il s'agit de quantités « libres » (dans le sens précisé), et non pas de quantités qui changent de valeur pendant qu'on écrit les formules ! Je ne peux m'empêcher de croire que les contradictions citées dans l'article de M. Winants, concernant les différentielles secondes, n'aient leur racine dans cette différence de point de vue.