

Calcul Différentiel et Intégral.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1929)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (1928)

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Calcul différentiel et intégral (7 heures). — I. Soient $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ les coordonnées rectangulaires d'un point d'une surface S exprimées à l'aide de deux paramètres indépendants, u et v , et

$$ds^2 = Edu^2 + 2F du dv + G dv^2$$

l'élément linéaire de S . Ecrire que les courbes $u = C^{\text{te}}$ sont des lignes géodésiques de S . On vérifiera que la condition obtenue peut être exprimée uniquement au moyen de F , G et de leurs dérivées premières.

II. Pour que la surface S_1 représentée par les équations

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = z(u, v)$$

soit coupée par les cylindres $u = C^{\text{te}}$ suivant des géodésiques, il faut et il suffit que z satisfasse à une équation aux dérivées partielles du second ordre (A_1).

Posant

$$\frac{\partial z}{\partial v} = u^n f(t),$$

former l'équation (A_2) vérifiée par la fonction $t(u, v)$; déterminer l'exposant n et la fonction $f(t)$ de manière que les coefficients de (A_2) soient indépendants de t ; soit (A_3) l'équation ainsi obtenue.

Soit (A_4) l'équation que l'on déduit de (A_3) en prenant v comme fonction, t et u comme variables indépendantes; chercher les solutions de (A_4), qui sont de la forme

$$v = T(t) + U(u) \quad \text{et} \quad v = T(t) U(u).$$

Indiquer les différentes formes qu'elles revêtent lorsqu'on n'emploie que des fonctions et des paramètres réels, et signaler leurs dégénérescences. Déterminer les fonctions $z(u, v)$ correspondantes.

III. Pour que la surface S représentée par les équations

$$x = u \cos \nu \cos \varphi, \quad y = u \cos \nu \sin \varphi, \quad z = u \sin \nu,$$

où φ est une fonction de u et de ν , soit coupée par les sphères $u = C^{\text{te}}$ suivant des géodésiques Γ , il faut et il suffit que $\varphi(u, \nu)$ satisfasse à une équation aux dérivées partielles du second ordre (E). Chercher les solutions de (E) de la forme $\varphi = U(u) + V(\nu)$; soient Σ les surfaces correspondant à ces solutions: dorénavant on se limitera à l'étude des surfaces Σ .

Posant

$$\log u = t, \quad \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\nu}{2} \right) = \tau, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \operatorname{tg} \omega,$$

on montrera que la détermination des surfaces Σ revient à l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre, aux variables τ et ω , soit:

$$\frac{d\omega}{d\tau} = F(\omega, \tau) \quad (\text{F})$$

suivie d'une quadrature. [On posera $F(0, 0) = a$.]

a. Construire les courbes intégrales C de (F) en s'aidant d'une représentation graphique préliminaire¹; en déduire la représentation γ d'une géodésique Γ sur le plan (τ, φ) . Les courbes γ sont de deux espèces différentes, celles de 1^{re} espèce, γ_1 , ayant une infinité de points singuliers M_n , et celles de 2^{me} espèce, γ_2 , en ayant seulement un nombre fini.

Vers quelles limites l et λ tendent les différences

$$l_n = \tau_n - \tau_{n-1}, \quad \lambda_n = \varphi_n - \varphi_{n-1}$$

entre les coordonnées homologues de deux points consécutifs M_{n-1} , M_n d'une courbe γ_1 quand n croit indéfiniment?

Caractériser, sur une surface Σ , les courbes $\nu = C^{\text{te}}$ et montrer que, sur une même surface Σ , les courbes Γ sont semblables.

Soient Δ les trajectoires orthogonales des courbes Γ appartenant à une même surface Σ ; construire les images δ des courbes Δ dans le plan (τ, φ) .

b. Soient Δ_1 et Δ_2 deux courbes Δ rencontrant la géodésique fixe Γ° en m° et m_2° , et la géodésique variable Γ en m_1 et m_2 respectivement. En s'appuyant sur les expressions des arcs de géodésiques par des intégrales définies portant sur des fonctions bien déterminées de ω et τ ,

¹ Pour l'étude des branches infinies on ne demande qu'une discussion basée sur le graphique; mais il sera tenu compte des précisions que l'on pourra fournir en s'appuyant sur la théorie des équations différentielles.

prises entre des limites τ_1^0, τ_2^0 (et τ_1, τ_2), et en utilisant (F), établir que la variation de l'arc $\widehat{m_1 m_2}$ de Γ est nulle; on a ainsi :

$$\widehat{m_1 m_2} = \widehat{m_1^0 m_2^0} . \quad (e)$$

Ne pourrait-on retrouver l'équation (e) en mettant l'élément linéaire de Σ sous la forme

$$ds^2 = d\sigma^2 + G dt^2 ?$$

Calculer l'expression explicite de σ en fonction de t, ω et τ .

Déterminer la courbure totale de Σ et rechercher si elle tend vers une limite au voisinage de oz .

N. B. — On pourrait traiter b avant a .

SOLUTION

PAR

M. Bertrand GAMBIER.

N. B. — Certaines parties, aisées, du problème sont traitées succinctement.

1. — On annule le produit symbolique

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} F & G \\ S \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & S \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$F \frac{\partial G}{\partial v} - 2G \frac{\partial F}{\partial v} + G \frac{\partial G}{\partial u} = 0 \quad (2)$$

$$ds^2 = \left(\sqrt{G} dv + \frac{F}{\sqrt{G}} du \right)^2 + \left(E - \frac{F^2}{G} \right) du^2 . \quad (3)$$

L'expression $d\sigma = \sqrt{G} dv + \frac{F}{\sqrt{G}} du$ est différentielle exacte ; $\sigma = \text{const}$ est l'équation des trajectoires orthogonales des géodésiques $u = \text{const}$.