II. — Normale a l'ovale.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1929)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

D'autre part,

$$A_0A' = \lambda_2 . F_2A = \lambda_1(4c - F_2A) \quad \text{d'où} \quad F_2A = \frac{4\lambda_1 c}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

$$B_0B = \lambda_2 . F_2B = \lambda_1(F_2B - 4c) \quad \text{d'où} \quad F_2B = \frac{4\lambda_1 c}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Par suite

$$r = \frac{F_2C}{2} = \frac{F_2A + F_2B}{4} = \lambda_1 c\left(\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) = \frac{2\lambda_1^2 c}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}.$$

Désignons par F_s le foyer singulier; ses distances aux trois foyers ordinaires sont [1]

$$F_sF_1 = \frac{2\lambda_2^2 c}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}, \qquad F_sF_2 = \frac{2\lambda_1^2 c}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}, \qquad F_sF_3 = 2\frac{d^2}{c} . \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}.$$

F_s est extérieur à l'intervalle F_1F_2 et placé du côté de F_1.

II. — Normale a l'ovale.

L'ovale étant donnée par l'équation $\lambda\rho + \lambda'\rho' = h$ rapportée à deux foyers F et F', nous prenons sur la courbe un point I,

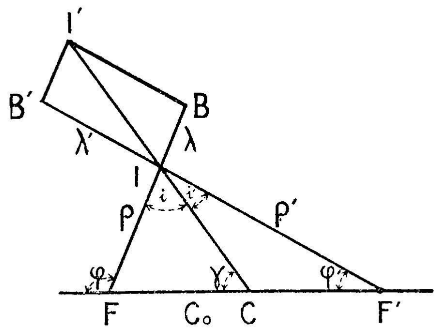

Fig. 4.

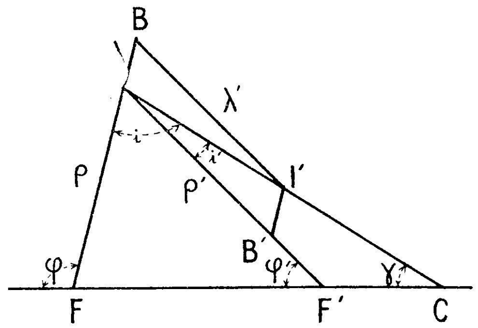

Fig. 5.

nous portons sur les rayons vecteurs FI et F'I des segments $IB = \lambda$ et $IB' = \lambda'$, et nous complétons le parallélogramme BIB'I' (fig. 4 et 5): sa diagonale II' est la normale à l'ovale.

[1] En prenant F_S pour origine, l'équation cartésienne de l'ovale prend une forme où F_SF_1, F_SF_2 et F_SF_3 interviennent de façon symétrique, se prêtant de façon commode à l'étude de la courbe.

La normale rencontre l'axe FF′ en un point C situé entre F etF′ si λ et λ' sont de même signe (fig. 4) et en dehors de l'intervalle FF′ si λ et λ' sont de signe contraire (fig. 5). Le tableau des équations bipolaires montre que pour l'ovale intérieure, la normale passe entre F_1 et F_2 et que pour l'ovale extérieure, elle rencontre l'axe en des points extérieurs à l'intervalle F_1F_2.

Soient i, i' et γ les angles que fait la normale avec les rayons vecteurs et avec l'axe FF′. Les deux triangles CFI et CF′I nous donnent

$$\frac{CF}{\rho} = \frac{\sin i}{\sin \gamma} \quad \text{et} \quad \frac{CF'}{\rho'} = \frac{\sin i'}{\sin \gamma} .$$

D'où

$$\frac{CF}{CF'} = \frac{\sin i}{\sin i'} \frac{\rho}{\rho'} .$$

Dans le triangle IBI′

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{|\lambda'|}{|\lambda|} .$$

Donc

$$\frac{CF}{CF'} = \frac{|\lambda'|}{|\lambda|} \cdot \frac{\rho}{\rho'} .$$

Le rapport des segments déterminés sur FF′ *par la normale à l'ovale est égal au produit du rapport des rayons vecteurs adjacents par un facteur constant.*

Réciproquement, *si la normale à une courbe détermine sur la droite passant par deux points fixes* F *et* F′ *deux segments dont le rapport est égal au produit du rapport des deux rayons vecteurs adjacents par un facteur constant, la courbe est une ovale de Descartes.* En effet, si

$$\frac{FC}{F'C} = \frac{|\lambda'|}{|\lambda|} \cdot \frac{\rho}{\rho'} ,$$

nous pouvons construire sur les directions des rayons vecteurs un parallélogramme de côtés égaux à λ et λ'.

Si nous connaissons le point d'intersection C d'une normale avec l'axe, nous connaîtrons le rapport $\rho : \rho'$ et, si nous écrivons l'équation de la courbe sous la forme

$$\left(\lambda \frac{\rho}{\rho'} + \lambda'\right)\rho' = h ,$$

nous pouvons déterminer ρ' et par suite ρ. Alors le point I est connu et CI est la normale cherchée.

Pour trouver l'angle γ de la normale avec l'axe, projetons le contour II'B sur l'axe focal et sur une droite qui lui soit perpendiculaire. Désignant par φ et φ' les angles des rayons vecteurs avec l'axe, nous obtenons

$$II' \cos\gamma - \lambda \cos\varphi - \lambda' \cos\varphi' = 0 \ , \quad II' \sin\gamma - \lambda \sin\varphi - \lambda' \sin\varphi' = 0 \ .$$

D'où

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\lambda \sin\varphi + \lambda' \sin\varphi'}{\lambda \cos\varphi + \lambda' \sin\varphi'} \ .$$

III. Points ou l'ovale présente un maximum ou un minimum de courbure.

1. — *Sommets de l'ovale.*

Par raison de symétrie, les sommets situés sur l'axe correspondent à un maximum ou à un minimum de courbure.

1. *Construction du centre de courbure relatif à un sommet.* — Si le point I (fig. 4 et 5) se rapproche indéfiniment du sommet A, le point C, intersection de la normale en I avec FF_1', tend vers une position limite C_0 qui est le centre de courbure en A, puisque par raison de symétrie, ce centre de courbure doit se trouver sur FF' et on a

$$\frac{C_0 F}{C_0 F'} = \frac{|\lambda'|}{|\lambda|} \frac{C_0 A}{C_0 A'} \ .$$

Le point C_0 divisant FF' dans un rapport donné se détermine par une construction bien connue et cette construction est applicable à l'ellipse ($\lambda = \lambda'$) et à l'hyperbole ($\lambda = -\lambda'$).

2. *Sommets de l'ovale intérieure.* — Quand le point I se déplace sur une ovale intérieure à partir du sommet A_1, voisin du foyer F_1, ρ_1 augmente et l'équation de la courbe $\lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_2 = -h_3$ montre que ρ_2 diminue. Alors $\rho_1 : \rho_2$ augmente, ainsi que $CF_1 : CF_2$