

propos d'une Note de M. Lainé « Sur quelques classes particulières de polynomes ».

Autor(en): **Schmidt, Hermann**

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1929)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

A propos d'une Note de M. Lainé « Sur quelques classes particulières de polynomes ».

Dans sa Note intitulée « Sur quelques classes particulières de polynomes » (*Enseign. math.* 25, 1926, p. 191-196; nous citerons ce travail par E. M.), M. LAINÉ a étudié, entre autres, les polynomes de degré n qui satisfont à l'équation différentielle

$$(x^2 + 1)y'' + (2(1 - a)x + b)y' - n(n + 1 - 2a)y = 0 \quad (a)$$

$(a, b \text{ réels, } b \neq 0) .$

Nous allons montrer que ces polynomes se déduisent des polynomes de JACOBI à l'aide d'une transformation simple, et que, de même, les formules (8) et (9) (*E. M.*, p. 194, 195) sont la conséquence d'une identité trouvée par le même auteur (*Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe*, Crelles Journal für reine und angewandte Mathematik 56, 1859; *Gesammelte Werke* Bd. 6, p. 184 et suiv.). M. Lainé s'est borné au domaine réel.

Nous posons

$$x = -2i\xi + i; \quad \xi = \frac{ix + 1}{2}, \quad (b)$$

de sorte que l'équation différentielle $a)$ devient une équation différentielle hypergéométrique dont les paramètres ont les valeurs

$$\alpha = 1 - 2a + n; \quad \beta = -n; \quad \gamma = 1 - a - \frac{ib}{2}. \quad (c)$$

Celle-ci, pourvu que γ soit $\neq 0, -1, -2 \dots$, a pour intégrale particulière le polynome

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \xi) = G_n\left(1 - 2a, 1 - a - \frac{ib}{2}, \xi\right), \quad (d)$$

où $F(\alpha, \beta, \gamma, \xi)$ désigne la série hypergéométrique de Gauss, et $G_n(p, q, \xi)$ le n -ième polynôme de Jacobi (pour la notation voir COURANT-HILBERT, *Methoden der mathematischen Physik*, Berlin 1925, p. 74-75). D'après Jacobi (loc. cit., équation (7)), on a

$$\begin{aligned} & \gamma(\gamma + 1) \dots (\gamma + n - 1) F(\alpha, \beta, \gamma, \xi) \\ &= (\xi(1 - \xi))^a \left(\frac{\xi}{1 - \xi}\right)^{\frac{ib}{2}} \frac{d^n}{d\xi^n} \left[(\xi(1 - \xi))^{n-a} \left(\frac{\xi}{1 - \xi}\right)^{\frac{-ib}{2}} \right] \quad (e) \end{aligned}$$

où α, β, γ ont la signification $c)$. En vertu de $b)$ et de la formule connue

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{1}{2i} \operatorname{lg} \frac{1 + ix}{1 - ix},$$

on peut donner à l'expression $e)$ la forme $f)$

$$\left(\frac{-i}{2}\right)^n (x^2 + 1)^a e^{-b \operatorname{arc} \operatorname{tg} x} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 + 1)^{n-a} e^{b \operatorname{arc} \operatorname{tg} x} = \left(\frac{-i}{2}\right)^n \prod_n(x)$$

en utilisant la définition (8) de M. Lainé. Les équations $e)$ et $f)$ nous montrent alors pour $a = \frac{n+1}{2}$, que, en ce cas, $\Pi_n(x)$ prend la valeur constante

$$P_n = (2i)^n \prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{n-1}{2} - \frac{ib}{2} + k\right) = \prod_{k=0}^{n-1} (b + i(2k - (n-1))) ,$$

donc pour $n = 2\nu$ pair

$$\begin{aligned} P_{2\nu} &= \prod_{k=0}^{\nu-1} [b + i(2k - (2\nu - 1))] [b - i(2k - (2\nu - 1))] \\ &= \prod_{m=1}^{\nu} (b^2 + (2m - 1)^2) \end{aligned}$$

et pour $n = 2\nu + 1$ impair

$$P_{2\nu+1} = b \prod_{k=0}^{\nu-1} (b + i(2k - 2\nu)) (b - i(2k - 2\nu)) = b \prod_{m=1}^{\nu} (b^2 + 4m^2) .$$

Ce sont les formules (9) de la Note de M. Lainé (*E. M.*, p. 195).

Enfin, il résulte facilement des « Relations inter functiones contiguas » de GAUSS (*Disquisitiones generales circa seriem infinitam*

$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \dots$; *Commentationes societatis Gottingensis recent.* Bd. 2, 1813; *Werke* Bd. 3, p. 125 et suiv.) [1], [2], [7], qu'on a

$$\begin{aligned} & \alpha(\beta - \alpha + 1)(\gamma - \beta) F(\alpha + 1, \beta - 1, \gamma, \xi) \\ & \quad + \beta(\beta - \alpha - 1)(\gamma - \alpha) F(\alpha - 1, \beta + 1, \gamma, \xi) \\ & + (\beta - \alpha) [\gamma(\beta + \alpha - 1) - 2\alpha\beta - (\beta - \alpha - 1)(\beta - \alpha + 1)\xi] F(\alpha, \beta, \gamma, \xi) = 0, \end{aligned}$$

et quand on y pose

$$\alpha = n + p; \quad \beta = -n; \quad \gamma = q,$$

on trouve pour les polynomes de Jacobi la formule de récurrence

$$\begin{aligned} & (n + p)(n + q)(2n + p - 1) G_{n+1}(p, q, \xi) \\ & \quad + n(2n + p + 1)(n + p - q) G_{n-1}(p, q, \xi) \\ & + (2n + p)((p - 1)q + 2n(n + p) - (2n + p - 1)(2n + p + 1)\xi) G_n = 0. \end{aligned}$$

En y introduisant les valeurs (b), (c) et la notation $\Pi_n(x)$ de M. Lainé, on retrouve sa dernière formule (p. 196). On constate ainsi que cette formule est une conséquence presque immédiate de relations classiques bien connues.

Jena, 18.IV.1929.

Hermann SCHMIDT.