

# SUR LES COURBES ADMETTANT UN GROUPE DE TRANSFORMATIONS DE MOEBIUS

Autor(en): **Schubarth, E.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-20686>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

en posant, d'autre part,

$$\theta' = \theta \quad \text{si} \quad \rho < 1 - k^2.$$

Cette nouvelle répartition  $\theta' = \theta'(\rho, \varphi)$  serait définie, univoque et continue sur tout le cercle et sur la circonférence on aurait  $|\theta'| > \frac{\pi}{2}$ . Mais on sait que cela implique contradiction en vertu de la proposition 2'. Il y a donc un point sans direction  $\theta$ .

\* \* \*

Enfin, MM. VESSIOT et MONTEL ont donné un théorème qui étend la proposition 4 au cas des espaces à  $n$  dimensions.

Ces auteurs sont partis de la démonstration de Poincaré-Bohl fondée sur l'indice de Kronecker. On trouvera leur théorème dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Séance du 20 décembre 1926*, p. 1252, M. Vessiot: *Sur les systèmes d'équations et les transformations continues*.

---

## SUR LES COURBES ADMETTANT UN GROUPE DE TRANSFORMATIONS DE MOEBIUS

PAR

E. SCHUBARTH (Bâle).

---

Par un groupe de Moebius, j'entendrai, dans un domaine de multiplicité complexe, un groupe continu de transformations de l'espace euclidien  $E_n$  à  $n$  dimensions qui échangent entre elles les sphères à  $n - 1$  dimensions, à savoir le groupe des homothéties et des inversions. Pour  $n \geq 3$ , ce sont les seules transformations qui conservent les angles. Le groupe de Moebius est simplement isomorphe au groupe des transformations projectives de l'espace  $E_{n+1}$  qui conservent en elle-même une quadrique  $Q_n^2$  parce qu'on peut établir une correspondance entre les points de l'espace  $E_n$  et ceux de la quadrique telle qu'à des

variétés linéaires de l'espace  $E_n$  correspondent univoquement des variétés sphériques sur  $Q_n^2$ , et vice-versa. (L'espace conforme  $E_n$  est considéré comme complété par un « point à l'infini », élément idéal introduit au lieu de l'« hyperplan de l'infini » dans l'espace projectif.) Une telle correspondance est connue sous le nom de projection stéréographique.

Les courbes invariantes vis-à-vis d'un groupe de Moebius, c'est-à-dire les trajectoires que peut parcourir un point, si l'espace  $E_n$  subit successivement des transformations de Moebius infinitésimales, toujours d'une même catégorie, jouent, dans la géométrie conforme, le rôle des courbes  $W$  de Klein et Lie dans la géométrie projective; en vue de cette analogie, je les désignerai par « courbes  $M$  ». C'est de leur classification et de leur détermination que je m'occupe dans cette petite Note.

Aux courbes  $M$  de l'espace  $E_n$  correspondent d'une manière univoque et réciproque, par une projection stéréographique, les courbes  $W$  situées sur une quadrique  $Q_n^2$  dans l'espace  $E_{n+1}$ . Par la détermination des courbes  $W$  dans l'espace  $E_{n+1}$  on comprend donc en même temps les courbes  $M$ . Cependant, l'équation du second degré, par laquelle les transformations projectives des « coordonnées sphériques » sont liées, ne permet pas de trouver les invariants et les formes canoniques des courbes  $M$  par le procédé qui conduit aux courbes  $W$ . Mais pour les classer, il suffit de savoir comment les points invariants par rapport aux transformations homographiques automorphes de la quadrique  $Q_n^2$  peuvent être distribués. Quant aux courbes  $M$  réelles, nous verrons que le nombre des classes n'augmente pas avec le nombre des dimensions de l'espace ambiant, et nous serons amenés à la détermination complète des courbes  $M$  réelles planes et gauches.

*Classification des courbes  $M$ .* — Je réunirai dans une catégorie les courbes  $M$  équivalentes entre elles par une transformation de Moebius. Les courbes  $M$  sont engendrées par le mouvement d'un point subissant une suite de transformations de Moebius infinitésimales. La classification des courbes se réduit à celle des transformations génératrices ou à celle des transformations finies automorphes qui en résultent. Nous n'avons à considérer — tout en nous servant toujours de l'image stéréographique —

que des transformations homographiques automorphes de la quadrique  $M_n^2$  directes, transformations qui conservent le sens de la rotation. Je laisserai de côté des courbes sphériques, c'est-à-dire des courbes situées sur une sphère à  $n - 1$  dimensions, car leurs images stéréographiques se trouvent dans un sous-espace linéaire de  $E_{n+1}$ . Leur ensemble correspond, par la projection stéréographique, à l'ensemble des courbes dans l'espace  $E_{n-1}$ .

Pour la théorie des courbes  $M$ , le théorème suivant de Frobenius <sup>1</sup> est fondamental:

Pour qu'une substitution puisse transformer en elle-même une forme symétrique non dégénérée, il faut et il suffit que les diviseurs élémentaires de sa fonction caractéristique soient deux à deux du même degré et s'annulent pour des valeurs réciproques, sauf ceux qui s'annulent pour la valeur  $+1$  ou  $-1$  et dont l'exposant est impair.

Par ce théorème, toutes les distributions possibles des points fixes sont connues. Comme pour la classification de toutes les transformations homographiques, je réunirai dans une même catégorie des transformations homographiques équivalentes qui transforment en elle-même la quadrique  $Q_n^2$  dans l'espace  $E_{n+1}$ , elles sont transformables les unes dans les autres par des transformations homographiques qui, elles aussi, n'altèrent pas la quadrique  $Q_n^2$ . De plus, je réunirai dans une même classe les catégories caractérisées par le même arrangement des points fixes. Une série de nombres  $e_1, e_2, \dots, e_r$  ( $e_1 + e_2 + \dots + e_r = n + 2$ ;  $e_i \geq e_{i+1}$ ), choisis conformément aux conditions de Frobenius comme exposants des diviseurs élémentaires de la fonction caractéristique, nous définit une classe caractérisée par  $[e_1 e_2 \dots e_r]$ . Dans ce symbole, appelé caractéristique, je rapprocherai les exposants appartenant à deux diviseurs élémentaires qui s'annulent pour des valeurs réciproques, et je marquerai les exposants (impairs) d'une base  $\lambda - 1$  par le signe  $+$  ( $\lambda$  étant la variable dans la fonction caractéristique). Pour  $n = 2$ , les seules caractéristiques possibles sont  $[11 11]$ ,  $[22]$ ; pour  $n = 3$ :

$$[11 11 \overset{+}{1}], [11 \overset{+}{3}], [22 \overset{+}{1}], [\overset{+}{5}].$$

<sup>1</sup> *Journal de Crelle*, t. 84 (1878), p. 41.

Passons aux *courbes M réelles*. Tout d'abord, je restreindrai la notion d'équivalence en ne considérant deux variétés géométriques ou deux transformations comme appartenant à la même catégorie, que lorsqu'elles sont transformables l'une dans l'autre par une transformation de Moebius *réelle*. Je vais projeter l'espace  $E_n$  stéréographiquement sur une quadrique  $Q_n^2$ , que j'appellerai brièvement « sphère à  $n$  dimensions », et qui se présente dans les  $n + 2$  coordonnées homogènes de l'espace  $E_{n+1}$  comme forme quadratique dont l'indice d'inertie est égal à 1. Or, M. Löwy<sup>1</sup> a donné le théorème analogue à celui de Frobenius, concernant les transformations linéaires *réelles* qui conduisent en elle-même une forme quadratique réelle (et non dégénérée) de variables réelles (cas particulier d'une forme d'Hermité). Pour classer ces transformations, il faut envisager la situation relative des points fixes et surtout s'ils sont réels ou non. Pour une forme quadratique dont l'indice d'inertie est égal à 1, les seuls cas qui puissent se présenter sont les suivants: La fonction caractéristique des transformations homographiques automorphes peut avoir:

1°  $n$  diviseurs élémentaires simples se distribuant à  $n$  racines de valeur absolue 1, ou bien

2°  $n$  diviseurs élémentaires simples se distribuant à  $n - 2$  racines de valeur absolue 1 et à deux racines réelles réciproques, ou bien

3°  $n - 3$  diviseurs élémentaires simples et un diviseur élémentaire triple; les racines correspondantes ont la valeur absolue 1, le diviseur élémentaire triple s'annule pour  $\pm 1$ .

Il faut exclure une fonction caractéristique n'ayant que des racines complexes de la valeur absolue 1 et dont tous les diviseurs élémentaires sont simples. Mais dans les autres cas, les conditions que nous venons de citer sont suffisantes pour prouver l'existence de transformations automorphes.

Par conséquent, *le nombre des classes de courbes M réelles dans l'espace à  $n$  dimensions est limité à 1 si  $n$  est pair, à 3 si  $n$  est impair.*

*Classes de courbes M contenant des courbes W.* Le groupe des transformations qui appartiennent en même temps au groupe

<sup>1</sup> *Nova Acta Halle* 71 (1898), pp. 425 ss.

projectif et au groupe de Moebius, est le groupe des homothéties. Dans une classe de courbes  $M$ , il peut arriver que l'on rencontre des courbes  $W$ ; pour cela, il ne faut qu'elle contienne des courbes admettant un groupe de transformations homothétiques. Nous sommes conduits immédiatement aux faits suivants:

Dans un espace à un nombre pair de dimensions, la seule classe possible de courbes  $M$  réelles a des courbes  $W$  comme représentants. L'autre cas ne peut se présenter que dans un espace à un nombre impair de dimensions, à savoir que là seulement peuvent exister des courbes  $M$  réelles qui ne sont pas transformables en courbes  $W$  par des transformations conformes réelles; les transformations du groupe automorphe d'une telle courbe altèrent tous les points de l'espace réel.

En effet, pour  $n$  pair, chaque homographie directe qui transforme en elle-même une sphère à  $n$  dimensions a un point fixe sur la sphère. Adoptons celui-ci comme point de vue de la projection stéréographique; la transformation de Moebius correspondante n'altérera pas le point à l'infini de l'espace conforme  $E_n$  (le plan de l'infini dans l'espace projectif) et, par suite, est une homothétie. Le second cas se trouve réalisé dans l'espace ordinaire par les loxodromies des lignes de courbure au tore.

*Courbes  $M$  réelles planes et gauches.* La situation relative des points fixes n'étant pas changée par la projection stéréographique, il est facile de répartir les courbes  $M$  réelles bien connues en diverses classes. Nous obtenons ainsi le tableau que voici (par  $\bar{c}$  ou par  $\bar{r}$  j'indiquerai que le point fixe correspondant est situé dans l'espace complexe ou réel; à  $\bar{1}$  correspond un point fixe extérieur à la sphère  $Q_3^2$ ):

$\left[ \begin{smallmatrix} 11 & 11 \\ \bar{c} & \bar{r} \end{smallmatrix} \right]$  spirales logarithmiques (de J. Bernoulli),

$\left[ \begin{smallmatrix} 11 & 11 & 1 \\ \bar{c} & \bar{c} & \bar{1} \end{smallmatrix} \right]$  loxodromies des lignes de courbure sur un tore,

$\left[ \begin{smallmatrix} 11 & 11 & 1 \\ \bar{c} & \bar{r} & \bar{1} \end{smallmatrix} \right]$  loxodromies des lignes de courbure sur un cône de révolution,

$\left[ \begin{smallmatrix} 11 & 3 \\ \bar{c} & \bar{r} \end{smallmatrix} \right]$  loxodromies des lignes de courbure sur un cylindre de révolution.

On obtiendra toutes les courbes  $M$  réelles en effectuant sur ces courbes spéciales des transformations de Moebius quelconques. Partant des surfaces représentées dans le tableau, on ne peut arriver par des transformations conformes qu'à des cyclides de Dupin. D'autre part, ces transformations conservent les lignes de courbure. Nous arrivons donc au résultat suivant :

*Les courbes réelles admettant un groupe de transformations de Moebius sont (à l'exception de courbes sphériques) :*

*dans le plan, les loxodromies d'un système linéaire de cercles ;*

*dans l'espace, les loxodromies des lignes de courbure des cyclides de Dupin.*

Il y a peu de temps, M. Thomsen<sup>1</sup> a donné un exposé de la géométrie différentielle conforme. Considérées à ce point de vue, nos courbes se présentent comme des courbes ayant leurs invariants différentiels constants.

Bâle, janvier 1926.

---

S U R L A R É S O L U T I O N  
D E Q U E L Q U E S S Y S T È M E S H O M O G È N E S D' É Q U A T I O N S  
D U S E C O N D D E G R É

P A R

D<sup>r</sup> Teresa Bianca MIGLIARI (Turin).

---

On connaît la méthode générale de résolution d'un système formé de deux équations homogènes du second degré à deux seules inconnues, ou de deux équations dont l'une est du premier et l'autre du second degré, etc. Au contraire, aucune méthode générale n'est connue pour la résolution des systèmes de trois équations du second degré; il existe cependant des cas où, à l'aide d'artifices convenables, on parvient à résoudre des systèmes particuliers de trois équations, à trois inconnues.

---

<sup>1</sup> *Abh. math. Seminar Hamburg* 4 (1925), p. 117.