

# L'équation $\mu y^2 = x^4 + a$ .

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

d'un certain argument constant  $\omega$ :

$$p^{2\omega} = \frac{1}{3}(2\gamma^2 + 1), \quad p'^{2\omega} = -\gamma(1 + \gamma^2),$$

$$p^{4\omega} = \frac{11\gamma^6 + 20\gamma^4 - 20\gamma^2 - 32}{48(\gamma^2 + 1)^2},$$

$$p\left(\omega - \frac{\nu}{2}\right) = \frac{1}{6}(\gamma^2 + 2), \quad p'\left(\omega - \frac{\nu}{2}\right) = \gamma, \quad p''\left(\omega - \frac{\nu}{2}\right) = \gamma^2,$$

$$p\left(\omega + \frac{\nu}{2}\right) = \frac{1}{6}(\gamma^2 - 4), \quad p'\left(\omega + \frac{\nu}{2}\right) = -\gamma, \quad p'' = 2 - \gamma^2,$$

$$p\left(\omega - \frac{3}{2}\nu\right) = \frac{\gamma^4 - 4\gamma^2 + 24}{6\gamma^2}, \quad p' = -\frac{\gamma^4 - 4\gamma^2 + 16}{\gamma^3},$$

$$p\left(\omega + \frac{3}{2}\nu\right) = \frac{\gamma^6 - 2\gamma^4 + 20\gamma^2 + 8}{6(\gamma^2 - 2)^2}, \quad p' = \frac{2\gamma^4 - 3\gamma^2 + 8}{(2 - \gamma^2)^3},$$

$$p(2\omega - \nu) = -\frac{1}{12}(\gamma^2 + 8), \quad p' = \frac{1}{4}\gamma^3,$$

$$p(2\omega + \nu) = \frac{-\gamma^4 + 4\gamma^2 + 12}{12\gamma^2}, \quad p' = \frac{\gamma^6 - 2\gamma^4 + 4\gamma^2 + 8}{4\gamma^3},$$

$$p(4\omega - 2\nu) = \frac{11\gamma^8 + 16\gamma^6 + 96\gamma^4 + 768\gamma^2 + 768}{48\gamma^6},$$

$$p\left(3\omega - \frac{\nu}{2}\right) = \frac{\gamma^4 + 20\gamma^2 + 24}{6\gamma^2}, \quad p' = \frac{5\gamma^4 + 20\gamma^2 + 16}{\gamma^3}.$$

L'ÉQUATION  $\mu y^2 = x^4 + a$ .

7. — Soient  $a$  et  $\mu$  deux nombres rationnels donnés et soit  $(x_0 y_0)$  une solution primitive de l'équation indéterminée

$$\mu y^2 = x^4 + a.$$

Cette solution particulière peut être rejetée à l'infini par la transformation homographique

$$x = x_0 + \frac{\mu y_0^2}{X}, \quad y = y_0 \cdot Y,$$

qui transforme l'équation considérée en l'équation suivante de FERMAT:

$$(YX^2)^2 = X^4 + 4x_0^3 X^3 + 6\mu x_0^2 y_0^2 X + 4\mu^2 x_0 y_0^4 X + \mu^3 y_0^6.$$

Les formules de représentation des solutions au moyen des fonctions elliptiques sont :

$$\begin{aligned} g_2 &= a\mu^2 y_0^4, & g_3 &= 0; \\ p^v &= -ax_0^2, & p'^v &= ax_0(a - x_0^4), \\ p''^v &= -\frac{1}{2}a(x_0^8 - 10ax_0^4 + a^2); \\ X + x_0^3 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'^v}{pu - p^v}, & Y &= \pm \frac{1}{X^2} [p(u + v) - pu]. \end{aligned}$$

8. *Généralisation de l'équation de Diophante.* — Les résultats ci-dessus trouvent leur application immédiate dans la résolution, à partir d'une solution primitive, des équations indéterminées du type

$$\mu y^2 = x^4 + z^4 + t^4.$$

$\mu$  étant un nombre rationnel donné. Par exemple, dans le cas ( $\mu = 3$ ), la solution de

$$3y^2 = x^4 + z^4 + t^4$$

résulte de la connaissance de la solution primitive (1, 1, 1, 1) : en prenant donc

$$\begin{aligned} a &= 2, & g_2 &= 18, & g_3 &= 0, & x_0 &= 1, & y_0 &= 1, \\ p^v &= -2, & p'^v &= -2, & p''^v &= 15, \end{aligned}$$

la solution  $u = v$  donne à la limite :

$$X + 1 = \frac{1}{2} \frac{p''^v}{p'^v}, \quad X = \frac{11}{4}, \quad x = \frac{23}{11},$$

d'où

$$23^4 + 11^4 + 11^4 = 3 \cdot (3 \cdot 107)^2;$$

on aurait ensuite

$$p^{2v} = \left(\frac{17}{4}\right)^2, \quad p'^{2v} = -\frac{4879}{32}, \quad \text{etc. ...}$$

9. *L'équation*  $2y^2 = x^4 + z^4 + t^4$ . — Parmi les équations qui viennent d'être traitées d'une manière générale, celle qui correspond au cas  $\mu = 2$  (trouver trois nombres dont la somme des

*bicarrés soit le double d'un carré*) est particulièrement intéressante: une solution primitive dépendant d'un paramètre arbitraire est en effet connue. Si trois nombres rationnels algébriques ont leur somme nulle, la somme de leurs bicarrés est toujours le double d'un carré; cela résulte de l'identité algébrique:

$$x^4 + y^4 + (x + y)^4 \equiv 2(x^2 + xy + y^2)^2 .$$

Si donc  $b$  et  $c$  sont deux nombres rationnels quelconques, l'équation

$$2y^2 = x^4 + b^4 + c^4 , \quad (a = b^4 + c^4) ,$$

admet toujours la solution primitive

$$x_0 = b + c , \quad y_0 = b^2 + bc + c^2 ,$$

comme le justifient en particulier les égalités:

$$1^4 + 1^4 + 2^4 = 2.3^2 ,$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 = 2.7^2 , \quad \text{etc. ...}$$

Alors:

$$g_2 = 4a(b^2 + bc + c^2)^4(b^4 + c^4) , \quad g_3 = 0 ,$$

$$p^\nu = -(b^4 + c^4)(b + c)^2 ,$$

$$p'^\nu = -2bc(b + c)(b^4 + c^4)(2b^2 + 3bc + 2c^2) ;$$

la solution limite pour  $u = \nu$  est en particulier:

$$X = -\frac{x_0^8 + 8ax_0^4 - a^2}{2x_0(x_0^4 - a)} , \quad Y = \frac{p^{2\nu} - p^\nu}{X^2} .$$

Parmi les solutions simples de cette équation, sont à signaler les suivantes (avec des nombres tels qu'aucun d'eux ne soit somme des deux autres):

$$1^4 + 3^4 + 10^4 = 2.71^2 ,$$

$$7^4 + 7^4 + 12^4 = 2.113^2 ,$$

$$23^4 + 46^4 + 121^4 = 2.(10\ 467)^2 ,$$

$$26^4 + 239^4 + 239^4 = 2.(57\ 123)^2 .$$