

Sur certains triangles arithmogéométriques.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Si donc nous posons toujours

$$p'^2 u = 4 p u (p^2 u - g_2) ,$$

avec la valeur spécifiée ci-dessus de l'invariant g_2 en fonction entière de t^4 , les formules de correspondance avec le problème de DIOPHANTE sont maintenant:

$$2x = \frac{p' u}{p u} , \quad U = x^2 - 2 p u ,$$

$$y = 1 - t^2 , \quad z = 1 + t^2 .$$

Parmi les solutions, celle de DIOPHANTE est

$$x = \frac{1 - t^4}{2t} , \quad U = \frac{(1 + t^2)^4}{4t^2} - (1 - t^2)^2 .$$

La solution correspondante de l'équation de la fonction de WEIERSTRASS est:

$$p u = - 2 t^2 , \quad p' u = \pm 2 t (t^4 - 1) ,$$

$$p(u + \omega_2) = \frac{g_2}{8t^2} , \quad p'(u + \omega_2) = \pm \frac{g_2(1 + t^2)}{8t^3} ,$$

$$\sqrt{p^2 u} = \pm \frac{t^8 + 14t^4 + 1}{4t(t^4 - 1)} ,$$

$$p'^2 u = \pm \frac{t^8 + 14t^4 + 1}{32t^3(t^4 - 1)^3} (t^{16} - 36t^{12} - 186t^8 - 36t^4 + 1) ;$$

à remarquer la présence du facteur octaédrique $t^8 + 14t^4 + 1$.

Pour $t = 2$, ces formules donnent $g_2 = 706 = 2 \times 353$,

$$p u = - 8 , \quad p' u = 60 ,$$

$$p^2 u = \left(\frac{481}{120} \right)^2 , \quad p'^2 u = \frac{130\,111 \times 481}{2^8 \cdot 3^3 \cdot 5^3} .$$

d'où la solution $x = \frac{130\,111}{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 481}$, $y = 3$, $z = 5$ antérieurement donnée.

SUR CERTAINS TRIANGLES ARITHMOGÉOMÉTRIQUES.

6. — La question précédente pose la recherche des *triangles* tels que la somme des quatrièmes puissances de deux de leurs côtés

et de la hauteur issue du sommet qu'ils définissent soit un carré parfait.

Tout arithmotriangle pythagorique est de cette nature. Il en est de même de tout *arithmotriangle héronien tel que les deux bissectrices intérieure et extérieure issues d'un même sommet soient égales*. Ces triangles, définis par la condition $C - B = \frac{\pi}{2}$, se construisent simplement au moyen des triangles rectangles. Ils peuvent être arithmogéométriquement représentés par les formules :

$$A = \frac{\pi}{2} - 2\theta, \quad a = \cos 2\theta,$$

$$B = \theta, \quad b = \sin \theta,$$

$$C = \frac{\pi}{2} + 2\theta, \quad c = \cos \theta.$$

$$2R = 1, \quad S = \frac{1}{8} \sin 4\theta;$$

de même que pour les triangles pythagoriques, cette surface S ne saurait être mesurée par un nombre carré parfait. Les deux bissectrices des angles en A ont pour longueur commune $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\theta$. Les bissectrices intérieure et extérieure issues du sommet B ont pour longueurs respectives

$$\frac{\cos \theta \cdot \cos 2\theta}{\cos \frac{3}{2}\theta} \quad \text{et} \quad \frac{\cos \theta \cdot \cos 2\theta}{\sin \frac{3}{2}\theta};$$

elles peuvent être mesurées rationnellement (pour $\text{tang} \frac{1}{4}\theta$ rationnel). En aucun cas, il ne peut en être de même des bissectrices égales issues de A ni de celles des angles en C .

La solution du problème arithmogéométrique posé est difficile; mais son étude met en évidence une équation intéressante. En exprimant que $b^4 + c^4 + h_a^4 = \square$, on obtient en effet l'équation de Fermat:

$$x^4 + 2 \frac{\cos 2A}{\sin^2 A} x^2 + 4 \cdot \cotg A \cdot x + 1 = y^2.$$

ou encore

$$(x^2 - 1)^2 + 2x \cotg A (x \cotg A + 2) = y^2,$$

où $x = \frac{ha}{a}$. Cette équation admet les solutions évidentes

$$x = 0, \quad \infty, \quad -2 \operatorname{tang} A, \quad \frac{2 \operatorname{cotg} A}{2 - \operatorname{cotg}^2 A}, \quad \frac{1}{4} \operatorname{cotg} A (\operatorname{cotg}^2 A - 2),$$

quelle que soit la valeur rationnelle de $\operatorname{tang} A$. En outre elle est satisfaite identiquement pour $A = \frac{\pi}{2}$ (c'est le cas des triangles rectangles); pour $B - C = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} A$ est solution (triangle à bissectrices égales, issues de A).

En posant $\operatorname{cotg} A = \gamma$, l'équation devient

$$y^2 = (x^2 - 1)^2 + 2\gamma x(\gamma x + 2);$$

elle permet d'étudier les triangles jouissant de la propriété indiquée que $b^4 + c^4 + h_a^4$ est le carré d'un nombre rationnel, pour des valeurs rationnelles de $\frac{ha}{a}$ et de $\operatorname{tang} A$. Les formules de réduction aux fonctions elliptiques sont:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - pv}, \quad \pm y = p(u + v) - pu = x^2 + \beta - 2pu,$$

$$\beta = \frac{1}{3}(\gamma^2 - 1),$$

$$g_2 = 1 + 3\beta^2 = \frac{1}{3}(\gamma^4 - 2\gamma^2 + 4) > 0,$$

$$g_3 = -(1 + 2\beta + \beta^3) = -\frac{1}{27}(\gamma^6 - 3\gamma^4 + 21\gamma^2 + 8) < 0,$$

$$\Delta = -\gamma^2(\gamma^6 - 2\gamma^4 + 11\gamma^2 + 16) < 0;$$

ϑ étant un argument constant défini par les équations concordantes:

$$p^\vartheta = -\beta, \quad p'^\vartheta = \gamma, \quad p''^\vartheta = \frac{1}{2}\gamma^2(\gamma^2 - 2),$$

$$p^{2\vartheta} = \frac{1}{48}(3\gamma^6 - 12\gamma^4 + 44\gamma^2 - 32),$$

$$p'^{2\vartheta} = -\frac{1}{32}\gamma(\gamma^8 - 6\gamma^6 + 28\gamma^4 - 56\gamma^2 + 64),$$

on obtient les solutions suivantes, relativement simples pour ce genre de questions, et qui peuvent être exprimées au moyen

d'un certain argument constant ω :

$$p^{2\omega} = \frac{1}{3}(2\gamma^2 + 1), \quad p'^{2\omega} = -\gamma(1 + \gamma^2),$$

$$p^{4\omega} = \frac{11\gamma^6 + 20\gamma^4 - 20\gamma^2 - 32}{48(\gamma^2 + 1)^2},$$

$$p\left(\omega - \frac{\nu}{2}\right) = \frac{1}{6}(\gamma^2 + 2), \quad p'\left(\omega - \frac{\nu}{2}\right) = \gamma, \quad p''\left(\omega - \frac{\nu}{2}\right) = \gamma^2,$$

$$p\left(\omega + \frac{\nu}{2}\right) = \frac{1}{6}(\gamma^2 - 4), \quad p'\left(\omega + \frac{\nu}{2}\right) = -\gamma, \quad p'' = 2 - \gamma^2,$$

$$p\left(\omega - \frac{3}{2}\nu\right) = \frac{\gamma^4 - 4\gamma^2 + 24}{6\gamma^2}, \quad p' = -\frac{\gamma^4 - 4\gamma^2 + 16}{\gamma^3},$$

$$p\left(\omega + \frac{3}{2}\nu\right) = \frac{\gamma^6 - 2\gamma^4 + 20\gamma^2 + 8}{6(\gamma^2 - 2)^2}, \quad p' = \frac{2\gamma^4 - 3\gamma^2 + 8}{(2 - \gamma^2)^3},$$

$$p(2\omega - \nu) = -\frac{1}{12}(\gamma^2 + 8), \quad p' = \frac{1}{4}\gamma^3,$$

$$p(2\omega + \nu) = \frac{-\gamma^4 + 4\gamma^2 + 12}{12\gamma^2}, \quad p' = \frac{\gamma^6 - 2\gamma^4 + 4\gamma^2 + 8}{4\gamma^3},$$

$$p(4\omega - 2\nu) = \frac{11\gamma^8 + 16\gamma^6 + 96\gamma^4 + 768\gamma^2 + 768}{48\gamma^6},$$

$$p\left(3\omega - \frac{\nu}{2}\right) = \frac{\gamma^4 + 20\gamma^2 + 24}{6\gamma^2}, \quad p' = \frac{5\gamma^4 + 20\gamma^2 + 16}{\gamma^3}.$$

L'ÉQUATION $\mu y^2 = x^4 + a$.

7. — Soient a et μ deux nombres rationnels donnés et soit $(x_0 y_0)$ une solution primitive de l'équation indéterminée

$$\mu y^2 = x^4 + a.$$

Cette solution particulière peut être rejetée à l'infini par la transformation homographique

$$x = x_0 + \frac{\mu y_0^2}{X}, \quad y = y_0 \cdot Y,$$

qui transforme l'équation considérée en l'équation suivante de FERMAT:

$$(YX^2)^2 = X^4 + 4x_0^3 X^3 + 6\mu x_0^2 y_0^2 X + 4\mu^2 x_0 y_0^4 X + \mu^3 y_0^6.$$