SUR QUELQUES CLASSES PARTICULIÈRES DE POLYNOMES

PAR

E. LAINÉ (Angers).

On sait que si l'équation en t

$$ct(t-1)+ft+g=0 \qquad (1)$$

a une racine entière positive, n, l'équation différentielle

$$(a+bx+cx^2)y''+(e+fx)y'+gy=0 \qquad (2)$$

a pour intégrale particulière un polynome de degré n.

J'ai d'ailleurs montré [1] que si l'équation (1) a une racine entière négative, $-n$, l'équation adjointe de (2) aura pour intégrale particulière un polynome de degré n, de sorte que l'intégration de l'équation (2) est toujours ramenée à des quadratures si l'équation (1) a une racine entière de signe quelconque.

Je me placerai exclusivement dans le domaine réel. Admettant l'existence d'une racine entière positive, n, pour l'équation (1), on peut ramener l'équation (2) aux formes canoniques suivantes:

1° l'équation

$$y''+axy'-nay=0 \ :$$

les polynomes correspondants sont les polynomes d'HERMITE;

2° l'équation

$$xy''+(\gamma-x)y'+ny=0 \ :$$

les polynomes correspondants sont les polynomes de KUMMER;

3° l'équation de GAUSS

$$x(1-x)y''+[\gamma-(\alpha+1)x]y'+n(\alpha+n)y=0 \ :$$

[1] *Enseignement mathématique*, avril 1924.

les polynomes correspondants sont les polynomes de JACOBI, qui comprennent comme cas particuliers les fonctions sphériques primitives;

4° enfin les deux équations

$$\begin{aligned} x^2y'' + [(2-a)x+1]y' - n(n+1-a)y &= 0\,, \\ (x^2+1)y'' + [2(1-a)x+b]y' - n(n+1-2a)y &= 0\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Les polynomes correspondants ne semblent avoir fait l'objet d'aucune recherche particulière: je voudrais indiquer ici quelques propriétés de ces polynomes.

Remarquons d'abord que dans toutes les équations précédentes figurent, avec n, d'autres paramètres que l'on suppose habituellement indépendants de n. On généraliserait donc sans difficulté les polynomes correspondants en supposant que les autres paramètres qui figurent dans les équations différentielles dépendent aussi de n. Par exemple l'équation

$$y'' + x\varphi(n)y' - n\varphi(n)y = 0$$

définit des polynomes qui comprennent, comme cas particuliers, ceux d'HERMITE, quand la fonction φ se réduit à une constante. On a encore pour ces polynomes

$$U_n = e^{-\frac{x^2}{2}\varphi(n)} \frac{d^n}{dx^n} e^{\frac{x^2}{2}\varphi(n)}\,.$$

Pour simplifier, je supposerai que dans les équations (3) les constantes a et b sont indépendantes de n.

Prenons d'abord la première équation (3)

$$x^2y'' + [(2-a)x+1]y' - n(n+1-a)y = 0\,. \tag{4}$$

C'est une équation qui n'est pas du type de FUCHS, l'origine étant un point d'indétermination. Faisons dans cette équation le changement de variable [1]

$$y = x^a e^{\frac{1}{x}} z\,:$$

on obtient l'équation

$$x^2z'' + [(2+a)x-1]z' + [a-n(n+1-a)]z = 0\,.$$

[1] P. HUMBERT. Monographie des polynomes de Kummer (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1922).

Or, si on dérive n fois l'équation

$$x^2 u'' + [(a - 2n + 2)x - 1]u' + (a - 2n)u = 0 ,$$

on retombe, en posant $u^{(n)} = z$, sur l'équation en z. Comme l'équation en u admet l'intégrale $x^{2n-a} e^{-\frac{1}{x}}$, l'équation en z admettra l'intégrale $\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{2n-a} e^{-\frac{1}{x}}\right)$, à laquelle correspond, pour l'équation en y, un polynome de degré n, P_n; nous poserons

$$P_n = x^a e^{\frac{1}{x}} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{2n-a} e^{-\frac{1}{x}}\right) . \tag{5}$$

Telle est la formule qui peut servir de définition aux polynomes P_n.

On en déduira, par des procédés classiques, la relation de récurrence

$$\begin{aligned}&(n + 1 - a)(2n - a) P_{n+1}\\ &= (2n + 1 - a)[(2n - a)(2n + 2 - a)x - a] P_n + n(2n + 2 - a) P_{n-1} . \end{aligned}\tag{6}$$

D'après la façon même dont on l'a établie, la formule (5) est toujours valable, que a dépende ou non de n. Prenons par exemple $a = n + 1$; l'équation (4) admet alors l'intégrale $y = 1$, et la formule (5) donne dans ce cas

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1} e^{-\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x^{n+1}} e^{-\frac{1}{x}} :$$

c'est la formule bien connue d'HALPHEN. On verrait d'ailleurs aisément qu'on a[1], quel que soit a,

$$P_n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m (n - a + 1 , n - m) x^{n-m} .$$

La relation (6), au contraire, n'est vraie que si a est indépendant de n. Si a est fonction de n, la relation de récurrence prend des formes très différentes. Par exemple, considérons l'équation

$$x^2 y'' - [2(n - 1)x + 1]y' + n(n - 1)y = 0 ;$$

[1] HALPHEN, *Œuvres*, tome II, p. 448.

on la ramène à l'équation (4) en posant $a = 2n$, et changeant x en $-x$. Les polynomes P_n correspondants vérifient, comme l'a montré TISSERAND, la relation

$$P_{n+1} - (2nx + 1) P_n + n(n-1)x^2 P_{n-1} = 0 ,$$

essentiellement distincte de (6).

Toujours dans l'hypothèse où a ne dépend pas de n, nous signalerons encore la relation

$$P_{n+1} - [(2n + 2 - a)x + 1] P_n = \frac{2n + 2 - a}{n + 1 - a} x^2 . \frac{dP_n}{dx} .$$

Considérons de même l'équation

$$(x^2 + 1)y'' + [2(1 - a)x + b]y' - n(n + 1 - 2a)y = 0 . \qquad (7)$$

C'est une équation du type de FUCHS, mais on ne peut, au moyen d'un changement de variable dans le domaine réel, la ramener à l'équation de GAUSS. En posant

$$y = (x^2 + 1)^a e^{-b \operatorname{arc} \operatorname{tg} x} z ,$$

on est conduit à l'équation

$$(x^2 + 1) z'' + [2(1 + a)x - b] z' + [2a - n(n + 1 - 2a)] z = 0 .$$

Or, si l'on dérive n fois l'équation

$$(x^2 + 1) u'' + [2(1 + a - n) x - b] u' + 2(a - n) u = 0 ,$$

on retombe, en posant $u^{(n)} = z$, sur l'équation en z. L'équation en u admettant l'intégrale $(x^2 + 1)^{n-a} e^{b \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}$, l'équation en z admet l'intégrale $\frac{d^n}{dx^n}[(x^2 + 1)^{n-a} e^{b \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}]$, à laquelle correspond pour l'équation en y un polynome de degré n, Π_n. Nous poserons

$$\Pi_n = (x^2 + 1)^a e^{-b \operatorname{arc} \operatorname{tg} x} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 + 1)^{n-a} e^{b \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}] . \qquad (8)$$

C'est la formule de définition des polynomes Π_n.

Remarquons que, quand b est nul et a entier positif, la formule (8) devient illusoire dès que les entiers n et a, ce dernier dépendant ou non de n, vérifient la double inégalité $\frac{n}{2} < a < n$: le polynome $(x^2+1)^{n-a}$ est alors en effet de degré inférieur à n. Nous supposerons b essentiellement différent de 0 : la formule (8) convient alors quel que soit a.

Prenons, par exemple, $a = \frac{n+1}{2}$; l'équation (7) montre que le polynome Π_n se réduit à une constante, soit P_n, que nous allons calculer. On a, par hypothèse

$$P_n = (x^2+1)^{\frac{n+1}{2}} e^{-b \operatorname{arc\,tg} x} \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2+1)^{\frac{n-1}{2}} e^{b \operatorname{arc\,tg} x}\right] ;$$

posons en outre

$$z = (x^2+1)^{\frac{n-3}{2}} e^{b \operatorname{arc\,tg} x} \qquad \text{d'où} \qquad P_{n-2} = (x^2+1)^{\frac{n-1}{2}} e^{-b \operatorname{arc\,tg} x} \frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} .$$

On a successivement

$$\frac{d^n}{dx^n}[(x^2+1)z] = (x^2+1)\frac{d^n z}{dx^n} + 2nx\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + n(n-1)\frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} ,$$

puis, comme $\frac{dP_{n-2}}{dx} = 0$,

$$(x^2+1)\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + [(n-1)x - b]\frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} = 0 .$$

et en dérivant

$$(x^2+1)\frac{d^n z}{dx^n} + [(n+1)x - b]\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + (n-1)\frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} = 0 .$$

On aura par suite

$$\frac{d^n}{dx^n}[(x^2+1)z] = \frac{b^2+(n-1)^2}{x^2+1}\frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} ,$$

et enfin

$$P_n = [b^2+(n-1)^2]\,P_{n-2} .$$

On trouve d'ailleurs immédiatement $P_0 = 1$, $P_1 = b$. On a donc

$$P_{2n+1} = b\prod_{m=1}^{n}(b^2+4m^2) \qquad \text{et} \qquad P_{2n} = \prod_{m=1}^{n}[b^2+(2m-1)^2] . \tag{9}$$

On peut donc écrire la formule suivante, analogue à celle d'HALPHEN :

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2+1)^{\frac{n-1}{2}} e^{b \operatorname{arc\,tg} x}\right] = \mathrm{P}_n (x^2+1)^{-\frac{n+1}{2}} e^{b \operatorname{arc\,tg} x} ,$$

P_n étant un polynome en b défini par les équations (9). On en déduit, en particulier, la formule

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2+1)^{\frac{2n-1}{2}} = (x^2+1)^{-\frac{2n+1}{2}} [1.3\ldots(2n-1)]^2 .$$

Signalons enfin la relation de récurrence

$$(n-a)(n-2a+1)\Pi_{n+1} = n(n+1-a)[4(n-a)^2+b^2]\Pi_{n-1}$$
$$+ (2n-2a+1)[2(n-a)(n+1-a)x - ab]\Pi_n ;$$

comme la relation (6), cette relation n'est valable que si a et b sont supposés indépendants de n.

SOLUTION D'UN PROBLÈME DE DIOPHANTE

PAR

É. TURRIÈRE (Montpellier).

Ce travail concerne l'équation de DIOPHANTE,

$$x^4 + y^4 + z^4 = u^2 ,$$

en nombres indéterminés, et les formules elliptiques, avec les notations de WEIERSTRASS, permettant d'en obtenir des solutions dépendant de paramètres arbitraires. Il fait suite aux divers articles sur l'arithmogéométrie publiés dans l'*Enseignement mathématique* de 1915 à 1919 (t. XVII, p. 315 ; XVIII, p. 81 ; p. 397 ; XIX, p. 159 ; p. 233 ; XX, p. 161 et p. 245). Il se rattache à un mémoire sur les équations indéterminées de Fermat du *Bulletin de la Société mathématique de France* (sous presse).