

**P. Appell. — Traité de Mécanique rationnelle.  
Tome V. Eléments de Calcul tensoriel,  
Applications géométriques et mécaniques,  
avec la collaboration de R. Thiry. — Un volume  
gr. in-8° de vi-198 pages. Prix: 40 francs.  
Gauthier-Villars et Cie. Paris. 1926.**

Autor(en): **Buhl, A.**

Objektyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

formation de l'intégrale complète par intégration d'une équation différentielle totale. Sans doute cela suffit pour obtenir *une* intégrale complète mais cela ne donne qu'une vue très insuffisante sur les harmonies cependant si remarquables qui unissent l'équation et son système caractéristique. Et, même dans le petit problème de géométrie, l'intégrale complète trouvée par la méthode précédente peut ne présenter que des propriétés peu ou pas intéressantes alors qu'on aurait eu beaucoup mieux avec une autre intégrale de S.

Dans les cas les plus généraux, M. Saltykow cherche justement à préciser tout ce que l'on peut obtenir des éléments analytiques accessibles; certes on n'a pas toujours des systèmes complets d'intégrales pour des systèmes différentiels tant soit peu compliqués mais il faut savoir reconnaître toutes les propriétés des éléments possédés. Les propriétés *involutives* jouent naturellement un très grand rôle en tout ceci. Considérées à un point de vue par trop immédiat et utilitaire ces propriétés sont souvent décevantes; ainsi deux intégrales d'un système canonique, combinées par la parenthèse de Poisson, doivent en donner une troisième... qui se réduit le plus souvent identiquement à une constante ou à une intégrale déjà possédée. Il y a comme cela des *cycles* d'intégrales desquels on ne peut plus sortir et le théorème de Poisson apparaît alors comme vain. Or ce n'est pas là le vrai point de vue: un système différentiel révèle quelque chose de sa nature intime par ses cycles, ses groupes fonctionnels d'intégrales qui peuvent permettre de transformer le système et d'y reconnaître de nouvelles conditions d'intégrabilité.

Les grandes conceptions de ce genre sont nombreuses dans ce magnifique ouvrage qui remet en honneur la théorie des caractéristiques avec une pureté digne de Cauchy. Tous les résultats essentiels sont étendus finalement aux équations qui contiennent *explicitement* les fonctions inconnues.

Quelques mots sur la personnalité de l'auteur, je pense, ne sembleront point superflus.

Voici bien trente années que les publications de M. Saltykow ont attiré mon attention et seulement quelques semaines que je l'ai rencontré en personne, à Bruxelles, dans cette Belgique si accueillante aux proscrits et particulièrement à la pensée proscrite. Belgrade lui fut d'abord un port de salut car il fallut fuir Kharkow et son Université, dans des conditions atroces où d'autres intellectuels laissèrent non seulement leurs biens mais leur vie.

Et l'on se demande avec stupeur quel bénéfice un grand pays comme la Russie peut trouver à se séparer de tels hommes.

A. BUHL (Toulouse)

P. APPELL. — **Traité de Mécanique rationnelle.** Tome V. *Eléments de Calcul tensoriel, Applications géométriques et mécaniques*, avec la collaboration de R. THIRY. — Un volume gr. in-8° de vi-198 pages. Prix: 40 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris. 1926.

Grâce à M. P. Appell et à son collaborateur M. R. Thiry, on peut dire que maintenant les théories einsteiniennes triomphent *officiellement* en France. Ce triomphe a même quelque chose de particulièrement éclatant puisqu'il est consacré par un cinquième volume venant s'adjoindre à un *Traité de Mécanique* dont la renommée est absolument universelle. Et l'esprit dans lequel est fait le nouvel exposé est véritablement excellent;

il ne pouvait même l'être davantage. Il ne s'agit pas de savoir si la Gravi-fique d'Einstein est parfaite au point de vue physique ; elle ne l'est certainement pas, pour la bonne raison que jamais conception humaine ne fut parfaite, mais cette Gravifique, cette « Géométrie électromagnétique dans laquelle la partie métrique constitue la Gravitation » n'en est pas moins un des monuments les plus admirablement ordonnés que le génie ait jamais conçu.

Il s'agit donc ici du « Calcul tensoriel » ou « Calcul différentiel absolu ».

Les débuts de ce calcul commencent à être bien connus. Tout le monde assimile facilement les jeux de bascule et surtout le rôle si curieux des indices répétés deux fois dans un terme monome, lesquels sont, de ce fait, indices de sommation. On a vraiment l'impression que les termes ainsi composés ont, les uns pour les autres, des affinités aussi étranges qu'utiles ; ils ne demandent qu'à s'agglomérer de la manière la plus profitable à l'obtention de quelque résultat saillant. Sylvester disait déjà quelque chose d'analogue à propos de la théorie des déterminants et, au fond, les principaux résultats tensoriels ont des symétries que l'on peut généralement ramener à celles de déterminants ordinaires ou symboliques. L'algèbre tensorielle engendre une analyse tensorielle, de même que les déterminants algébriques engendrent des déterminants fonctionnels. Les symboles à trois indices de Christoffel, ceux à quatre indices de Riemann, les dérivées covariantes et contrevariantes ont les plus esthétiques propriétés qui ont été heureusement rassemblées, à la fin du Chapitre II, en des tableaux dont le seul aspect aidera puissamment la mémoire.

Mais le plus curieux est que ces symétries analytiques correspondent à des faits physiques. Les généralités vectorielles, les formules propres à la déformation d'un milieu continu, les équations de l'équilibre élastique, celles d'Euler pour le mouvement du solide à point fixe et tant d'autres ne semblent plus que des cas particuliers de constructions tensorielles abstraites comme si, derrière les phénomènes les plus divers, nous saisissons vraiment une pensée constructrice unique.

Avec le déplacement parallèle généralisé apparaissent très simplement les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un  $ds^2$  caractérise un espace euclidien. Le parallélisme doit être alors celui qui correspond au sens antique du mot ; le vecteur transporté de A en A est toujours le même, quel que soit le chemin fermé parcouru et, à ce caractère univoque, correspond une condition d'intégrabilité qui conduit à la nullité de symboles riemanniens bien connus.

Ces mêmes idées sont reprises plus loin avec la notion de courbure riemannienne ; cette fois le transport, par parallélisme vectoriel, de A en A, conduit, en général, à la considération de deux vecteurs différents et ceci suffirait à trahir la courbure pour des êtres ne percevant rien hors de la variété supportant le transport.

Les géométries de Weyl et d'Eddington, en lesquelles les symboles de Christoffel restent indéterminées ou sont déterminés autrement qu'en géométrie riemannienne, conduisent naturellement aux généralisations de M. Elie Cartan, aux espaces affines qui, contrairement aux espaces gravifiques d'abord employés, peuvent avoir une *torsion* non nulle. Reste à savoir si l'avenir nous révélera des phénomènes physiques interprétables dans des espaces tordus. Telles sont, très brièvement, les idées essentielles exposées par MM. Appell et Thiry. Elles sont encadrées par un premier et

un dernier chapitre provenant d'un cours de M. E. Borel, rédigé par M. H. Mineur. Le premier chapitre a trait aux propriétés essentielles des formes linéaires et quadratiques ; le dernier traite de la géométrie de Cayley.

Il s'agit alors de formes quadratiques au sens algébrique de cette expression ; les *absolus* sont des coniques, des quadriques..., tandis que les théories riemanniennes et einsteiniennes du corps de l'ouvrage exigent l'étude de formes *différentielles* quadratiques, notamment de  $ds^2$ . Mais il s'agit évidemment, dans les deux cas, de généralisations des concepts géométriques élémentaires ; les deux choses sont à rapprocher le plus possible. Félicitons-nous, encore une fois, de les voir passer dans l'enseignement officiel, à l'abri de noms dont l'autorité n'est contestée par personne.

A. BUHL (Toulouse).

S. BERNSTEIN. — **Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des Fonctions analytiques d'une variable réelle**, professées à la Sorbonne. — Un volume gr. in-8° de x-208 pages. Prix : 50 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris. 1926.

Pour bien situer cet ouvrage, il conviendrait peut-être de rappeler un théorème de Weierstrass sur la représentation approchée, par fonctions entières, de fonctions, analytiques ou non, pouvant former des ensembles étendus. Ce théorème a déjà joué un rôle important dans les *Leçons sur les Fonctions de variables réelles* publiées, en 1905, par M. Emile Borel, dans sa « Collection de Monographies » où, d'ailleurs, le présent volume de M. Bernstein est également publié. Mais il s'agit ici de précisions, dues particulièrement aux idées de Tchebyscheff, auprès desquelles le théorème de Weierstrass ne semble plus qu'une généralité assez diffuse.

D'abord, comme le remarque l'auteur, il est évident qu'on ne peut parler, sans précautions spéciales, de convergence *uniforme* sur l'axe *réel* et il faut étendre cette notion à cet axe. Le *polynome* est également généralisé et devient une somme de termes tels que  $a_i \varphi_i(x)$ , les  $\varphi_i$  étant bornées et continues sur de certains segments.

Bien entendu, ces expressions peuvent devenir des polynomes ordinaires en lesquels on retrouve celui de Tchebyscheff qui s'écarte le moins possible de zéro sur le segment A (— 1, + 1). Puis, de ce problème fort particulier, nous nous élevons de nouveau à des généralités de plus en plus étendues avec les cas où le polynome cherché satisfait à des conditions extérieures à A, comme d'avoir, hors de A, des valeurs ou des racines données.

Les  $\varphi_i$  peuvent également devenir des fractions rationnelles, des fonctions circulaires... ; il y a, pour les polynomes généralisés, une règle de Descartes généralisée, et, dans le même ordre d'idées, des polynomes *oscillateurs* qui se prêtent notamment à la représentation de  $|x|$ . Enfin, on peut chercher à construire les polynomes d'approximation en tenant compte de propriétés imposées à leur dérivée. Tout ceci forme un premier chapitre se rapportant aux segments finis.

Avec le chapitre II, nous considérons les propriétés extrémales *sur tout l'axe réel* des fonctions dépendant d'un nombre fini ou infini de paramètres. Ici, d'ingénieuses propositions se présentent d'abord pour certaines fractions algébriques dont le numérateur est un polynome et dont le dénominateur est la racine carrée d'un autre polynome. On étudie de même des fractions rationnelles compliquées qui ne s'écartent que faiblement de types beaucoup