LA THÉORIE DES GROUPES ET LES RECHERCHES RÉCENTES DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Autor(en): **Cartan, E.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515748

LA THÉORIE DES GROUPES ET LES RECHERCHES RÉCENTES DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE [1]

PAR

E. CARTAN (Paris).

I

On sait, depuis M. F. KLEIN (Programme d'Erlangen [2]) et S. LIE, le rôle important joué par la théorie des groupes dans la géométrie. H. POINCARÉ a popularisé dans le grand public scientifique cette idée fondamentale que la notion de groupe est à la base des premières spéculations géométriques. La géométrie élémentaire est au fond la théorie des invariants d'un certain groupe, le groupe des déplacements euclidiens; elle a en effet pour but l'étude des propriétés des figures qui se conservent par un déplacement arbitraire; dire que tous les déplacements forment un groupe, c'est justement exprimer en langage précis l'axiome d'après lequel deux figures égales à une troisième sont égales entre elles.

La géométrie projective a de même pour objet l'étude des propriétés des figures qui se conservent par le groupe des transformations homographiques, et on peut également assigner à la géométrie affine, à la géométrie conforme ou anallagmatique, etc., un groupe correspondant. Inversement tout groupe continu donne naissance à une discipline géométrique autonome.

Dans chacune de ces géométries on attribue, pour la commodité du langage, à l'espace dans lequel les figures étudiées

---

[1] Conférence faite le mercredi 13 août 1924, au Congrès international de mathématiques, qui s'est tenu à Toronto du 11 au 16 août.

[2] Le Programme d'Erlangen (1872) a été reproduit dans les *Math. Annalen*, t. 43 (1893), p. 63-109, ainsi que dans le t. I des *Gesammelte mathematische Abhandlungen* de F. Klein (1921).

sont localisées les propriétés elles-mêmes du groupe correspondant, ou groupe *fondamental*; c'est ainsi qu'on est arrivé à dire: « l'espace euclidien », « l'espace affine », etc., au lieu de « l'espace dans lequel on n'étudie que les propriétés des figures invariantes par le groupe euclidien, le groupe affine, etc. » Chacun de ces espaces est *homogène*, en ce sens que ses propriétés restent inaltérées par une transformation du groupe fondamental correspondant.

Plusieurs années avant le Programme d'Erlangen, B. RIEMANN avait introduit, dans son mémoire célèbre: « *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*[1] », des espaces *non homogènes* au sens qui vient d'être donné à cette expression. Dans ces espaces le carré de la distance de deux points infiniment voisins était défini par une forme différentielle, jusqu'à un certain point arbitraire, mais qu'en fait, on a toujours supposée quadratique. Ces espaces ont fait l'objet de nombreux et importants travaux, principalement en Allemagne et en Italie[2]. Mais ils ont surtout pris une importance considérable depuis que M. EINSTEIN, par la théorie de la relativité généralisée, a essayé, en identifiant notre Univers à un espace de Riemann, de réunir en une seule et même théorie la gravitation, l'optique et l'électromagnétisme. Le mouvement d'idées auquel cette théorie a donné naissance a conduit, par des généralisations importantes, à des espaces nouveaux; il suffira de citer les espaces de M. H. WEYL et les espaces de M. EDDINGTON. Quel rôle la notion de groupe joue-t-elle, ou plutôt doit-elle jouer, dans ce champ nouveau de la Géométrie; est-il possible de faire rentrer dans le cadre, suffisamment élargi, du programme d'Erlangen toutes les géométries nouvelles et une infinité d'autres, c'est ce que je me propose d'examiner.

II

A première vue, la notion de groupe semble étrangère à la géométrie des espaces de Riemann, car ils ne possèdent l'homo-

---

[1] B. RIEMANN, *Gesammelte math. Werke*, Leipzig (1876), p. 254–269.

[2] Il nous suffira de citer les noms de E.-B. CHRISTOFFEL, R. LIPSCHITZ, A. VOSS, G. RICCI, L. BIANCHI et T. LEVI-CIVITA.

généité d'aucun espace à groupe fondamental. Néanmoins, si un espace de Riemann ne possède pas une homogénéité absolue, il possède cependant une sorte d'homogénéité infinitésimale; au voisinage immédiat d'un point donné il est assimilable à un espace euclidien. Toutefois si deux petits morceaux voisins d'un espace de Riemann peuvent être assimilés chacun à un petit morceau d'espace euclidien, ces deux petits morceaux sont sans lien entre eux, ils ne peuvent pas, *sans convention nouvelle*, être regardés comme appartenant à un seul et même espace euclidien. Autrement dit, un espace de Riemann admet, au voisinage d'un point A, une rotation autour de ce point, mais une translation, même considérée dans les effets qu'elle produit sur une région très petite de l'espace, n'a pas de sens. Or, c'est le développement même de la théorie de la relativité, liée par l'obligation paradoxale d'interpréter dans et par un Univers non homogène les résultats de nombreuses expériences faites par des observateurs croyant à l'homogénéité de cet Univers, qui permit de combler en partie le fossé qui séparait les espaces de Riemann de l'espace euclidien. Le premier pas dans cette voie fut l'œuvre de M. LEVI-CIVITA, par l'introduction de sa notion de *parallélisme*[1].

Voici comment, grâce à cette notion, les choses peuvent être présentées. On peut imaginer, en chaque point d'un espace de Riemann, un *espace euclidien* (fictif) *tangent*, dont ce point et les points infiniment voisins font partie; la définition du parallélisme de M. Levi-Civita permet alors de raccorder en un seul les espaces euclidiens tangents en deux points infiniment voisins quelconques; autrement dit, elle confère à l'espace de Riemann une *connexion euclidienne*. Si l'on considère dans l'espace de Riemann une ligne continue AB, on peut raccorder de proche en proche en un seul les espaces euclidiens tangents aux différents points de AB; par suite aussi, aux infiniment petits près du second ordre, tous les points de l'espace de Riemann voisins de la ligne AB viendront, par cette espèce de *développement*, se localiser dans l'espace euclidien tangent en A. Le mot *développement* est mis là à dessein. Si en effet on applique le procédé qui vient

[1] *Rend. Circ. mat. di Palermo*, t. 42 (1917), p. 173-205.

d'être indiqué à une surface ordinaire, regardée comme un espace de Riemann à deux dimensions défini par le ds^2 de la surface, le raccord de proche en proche des plans (euclidiens) tangents à une ligne AB tracée sur la surface est identique au développement classique sur un plan de la développable circonscrite à la surface le long de AB.

Comme on le voit, la notion de parallélisme de M. Levi-Civita permet d'assimiler à un vrai espace euclidien, ou du moins à une portion de cet espace, toute la région d'un espace de Riemann qui avoisine un arc de courbe quelconque AB tracé dans l'espace donné. La différence essentielle qui subsiste encore entre un espace de Riemann et l'espace euclidien est la suivante: Si l'on joint un point A à un point B par deux chemins différents, ACB, AC'B, et qu'on développe sur l'espace euclidien tangent en A les deux régions qui entourent ces deux chemins, on n'obtiendra dans les deux cas, pour le point B et le petit morceau d'espace qui l'entoure, ni la même position ni la même orientation. Autrement dit, le développement de l'espace euclidien tangent, quand on se déplace dans l'espace de Riemann, n'est pas *holonome.* Au lieu de dire que l'espace de Riemann est à connexion euclidienne, on peut dire que c'est un espace euclidien non holonome. Mais il est important de remarquer qu'il ne l'était pas par lui-même, je veux dire par son seul ds^2; *il l'est devenu par la définition du parallélisme de M. Levi-Civita.*

III

Cette manière d'envisager la notion de parallélisme est, je crois, celle qui va le mieux au fond des choses. Ce serait restreindre sa portée que de n'y voir, comme on l'a fait en général, qu'un procédé de comparaison des vecteurs issus de deux points infiniment voisins; il faut y voir au contraire un moyen d'introduire dans un espace de Riemann toute la gamme des déplacements de l'espace euclidien, du moins en ce qui concerne les effets qu'ils produisent dans une région infiniment petite de l'espace.

Le point de vue habituel permet la fondation de la géométrie affine non holonome, parce que la notion de l'équipollence de deux vecteurs a un sens dans l'espace affine; le second point de vue seul permet la fondation de la géométrie projective ou de la géométrie conforme non holonomes, bien que la notion de vecteurs équipollents n'ait aucun sens dans l'espace projectif et que la notion elle-même de vecteur n'ait aucun sens dans l'espace conforme.

Pour définir par exemple un espace projectif non holonome (ou un espace à connexion projective), on imaginera, en chaque point d'un espace supposé initialement dénué de toute propriété géométrique, un espace projectif tangent, ainsi qu'une loi permettant le raccord en un seul des espaces projectifs tangents en deux points infiniment voisins. Cette loi permet alors le développement, sur l'espace projectif tangent en un point A, d'une ligne quelconque AB et de la région de l'espace donné avoisinant immédiatement cette ligne. Cette loi ne sera soumise *a priori* qu'aux restrictions habituelles en géométrie différentielle (linéarité des composantes de la connexion projective par rapport aux différentielles des coordonnées, existence de dérivées jusqu'à un certain ordre, etc.).

D'une manière générale, à tout groupe continu G correspond, dans la conception de M. Klein, une géométrie holonome; dans la conception nouvelle, il lui correspond une infinité de géométries non holonomes. La géométrie des espaces de Riemann correspond au groupe des déplacements euclidiens, et *ce n'est même pas la plus générale de cette espèce*, car, un ds^2 étant donné, on peut imaginer une infinité de lois de parallélisme autres que celle de M. Levi-Civita; toutes sont également légitimes; nous verrons dans un instant ce qui différencie celle de M. Levi-Civita de toutes les autres. Les espaces de M. Weyl constituent de même une catégorie particulière des espaces non holonomes admettant pour groupe fondamental le groupe des déplacements et des similitudes; les espaces d'Eddington correspondent au groupe des transformations affines.

En résumé, dans les généralisations précédentes, l'idée directrice est la suivante. Dans un espace holonome au sens de M. F. Klein, tout est commandé par le groupe fondamental et ses différentes opérations. Ce sont ces opérations qui font de l'espace un tout organique. Dans les espaces non holonomes, ce sont encore les opérations du groupe qui sont un principe d'organisation, mais uniquement de proche en proche. C'est précisément en analysant ce que cette organisation a d'incomplet que nous allons arriver au rôle tout à fait nouveau que va jouer encore la notion de groupe dans les géométries nouvelles.

IV

Prenons par exemple un espace de Riemann et considérons dans cet espace un contour fermé partant d'un point A. Développons de proche en proche, sur l'espace euclidien tangent en A, l'espace euclidien tangent aux différents points du contour. Le petit morceau d'espace qui entoure le point A prendra, suivant qu'on considère ce point comme point de départ ou point d'arrivée, deux positions différentes dans l'espace sur lequel se fait le développement, et on passera de la position finale à la position initiale par un certain déplacement euclidien, que nous dirons *associé* au contour fermé; c'est un déplacement, répétons-le, qui opère dans l'espace euclidien tangent en A; bien qu'il ait été défini par ses effets sur le point A et son voisinage, on peut évidemment l'appliquer à n'importe quelle figure (F) tracée dans l'espace euclidien tangent en A.

Considérons maintenant les différents contours fermés partant d'un point donné A. *Les différents déplacements euclidiens qui leur sont associés forment un groupe.*

Soient en effet deux contours fermés (C_1) et (C_2) partant de A. Soient D_1 et D_2 les déplacements qui leur sont associés; soit enfin (C) le contour fermé obtenu en décrivant successivement (C_1) et (C_2), et D le déplacement associé à (C). Une figure (F) tracée dans l'espace euclidien tangent en A prendra respectivement, après développement du contour (C_1) ou du contour (C_2), la position (F_1) ou la position (F_2); après développement du contour total (C), elle prendra une position (F') placée par rapport à (F_1) comme (F_2) est placée par rapport à (F); autrement dit le déplacement D qui amène (F') en (F) est la résultante du déplacement D_2 qui amène (F') en (F_1) et du déplacement D_1 qui amène (F_1) en (F). La relation

$$D = D_2 D_1$$

qui vient d'être obtenue montre bien que l'ensemble des déplacements associés aux contours fermés issus de A forme un groupe g.

Que se passerait-il si, au lieu du point A, on considérait un autre point A′ ? Imaginons qu'on relie ces deux points par un chemin arbitraire, mais donné ABA′ ; on peut raccorder de proche en proche, par ce chemin, l'espace euclidien tangent en A′ à l'espace euclidien tangent à A. Dans cet espace euclidien unique il est facile de voir que le groupe g' associé à A′ est *identique* au groupe g associé à A. Soit en effet (C) un contour fermé partant de A, et (C′) le contour fermé A′BA(C)ABA′; soient respectivement D et D′ les déplacements qui leur sont associés. Soit (F) une figure quelconque de l'espace euclidien tangent en A, (F_1) la position qu'elle prend après développement du contour (C). Les figures (F) et (F_1) peuvent être respectivement regardées comme résultant de deux figures (F′) et (F'_1) de l'espace euclidien tangent en A′ par le raccord fait le long du chemin A′BA. Par développement du contour fermé (C′), il est bien évident que la figure (F′) vient en (F'_1) ; les déplacements D et D′ sont donc identiques. A tout déplacement de g correspond donc un déplacement identique de g' et réciproquement.

En définitive, à l'espace de Riemann donné est associé un sous-groupe g déterminé du groupe G des déplacements euclidiens, sous-groupe qui peut se confondre avec le groupe G lui-même, mais qui peut aussi se réduire à la transformation identique; dans ce dernier cas il est bien évident que l'espace de Riemann est complètement holonome et ne diffère qu'en apparence de l'espace euclidien proprement dit. Il est naturel de donner au groupe g le nom de « groupe d'holonomie » de l'espace de Riemann.

Plus généralement, à tout espace non holonome de groupe fondamental G est associé un sous-groupe g de G qui est son groupe d'holonomie et qui ne se réduit à la transformation identique que si l'espace est parfaitement holonome.

Le groupe d'holonomie d'un espace mesure en quelque sorte le degré de non holonomie de cet espace, de même que le groupe de Galois d'une équation algébrique mesure en quelque sorte le degré d'irrationalité des racines de cette équation.

V

Avant d'indiquer les problèmes les plus intéressants que pose la notion du groupe d'holonomie, il ne sera pas inutile de faire une remarque relative aux transformations infinitésimales de ce groupe. Il est évident que parmi ces dernières se trouvent les transformations associées aux contours fermés *infiniment petits* (dans tous les sens) tracés dans l'espace non holonome donné. On peut démontrer rigoureusement que si toutes ces transformations étaient nulles, le groupe d'holonomie se réduirait à la transformation identique. Or les géométries non holonomes les plus importantes dans les applications sont celles pour lesquelles les transformations infinitésimales associées aux contours fermés infiniment petits partant d'un point *laissent ce point invariant.* Comme je l'ai proposé, on peut convenir de dire que les espaces non holonomes correspondants sont *sans torsion.* Il en est ainsi des espaces de M. Weyl et des espaces d'Eddington. Il en est ainsi également des espaces de Riemann à parallélisme de Levi-Civita: on peut même caractériser complètement le parallélisme de M. Levi-Civita par *la condition de priver l'espace de toute torsion.*

On conçoit que l'absence de torsion ait sa répercussion sur la nature du groupe d'holonomie, ce groupe, dans le cas où il ne se réduit pas à la transformation identique, devant admettre une transformation infinitésimale non identique laissant invariant un point arbitraire.

VI

Je ne citerai que pour mémoire le problème de la détermination du groupe d'holonomie d'un espace non holonome donné à groupe fondamental G. Il peut être résolu complètement dès qu'on connaît tous les types de sous-groupes de G.

Dans la théorie des équations algébriques, on sait qu'il existe toujours des équations algébriques admettant un groupe de Galois donné à l'avance. Il existe toujours d'une manière analogue des espaces non holonomes à groupe fondamental G admettant pour groupe d'holonomie un sous-groupe arbitrairement donné de G. Il existe par exemple des espaces à connexion euclidienne dont le groupe d'holonomie est le groupe des translations; mais ce ne sont pas des espaces de Riemann (à connexion de Levi-Civita). L'absence de torsion d'un espace de Riemann restreint en effet, comme nous l'avons dit plus haut, la nature des groupes d'holonomie possibles, et c'est un problème intéressant que de déterminer, pour chaque nombre de dimensions de l'espace, tous ces groupes d'holonomie. Je me contente d'indiquer la solution de ce problème pour $n = 2$ et $n = 3$. Les espaces de Riemann à deux dimensions qui ne sont pas holonomes ne peuvent admettre comme groupe d'holonomie que le groupe à trois paramètres de tous les déplacements. Quant aux espaces de Riemann à trois dimensions, le groupe d'holonomie peut être:

Soit le groupe à 6 paramètres de tous les déplacements (cas général);

Soit le groupe à 5 paramètres qui laisse invariante une direction isotrope fixe (ds^2 réductible à la forme $dz^2 + 2dx\,dy + \mathrm{H}(x,y,z)\,dx^2$);

Soit le groupe à 3 paramètres qui laisse invariant un point fixe (ds^2 réductible à la forme $dz^2 + z^2\,d\sigma^2$, où $d\sigma^2$ ne dépend que de deux variables x, y);

Soit le groupe à 3 paramètres qui laisse invariant un plan fixe ainsi que tous les plans parallèles (ds^2 réductible à la forme $dz^2 + d\sigma^2$, ou, dans le cas où le plan est isotrope, $dz^2 + 2dx\,dy + \mathrm{H}(x,z)\,dx^2$).

A côté des espaces de Riemann, deux autres catégories d'espaces non holonomes sont particulièrement intéressantes. Si, au lieu de considérer un ds^2 donné, on considère une équation $ds^2 = o$, il est possible d'une infinité de manières d'attribuer à l'espace une connexion conforme de manière que les lignes de longueur nulle de l'espace soient précisément les courbes définies par l'équation donnée. Parmi cette infinité de connexions conformes, il en est une privilégiée qui jouit de propriétés particulièrement simples et que j'ai proposé d'appeler normale[1]; les espaces con-

[1] E. CARTAN. *Les espaces à connexion conforme* (Ann. de la Soc. polon. de math., 1923, p. 171-221).

formes non holonomes *normaux* jouent par rapport à la géométrie conforme le rôle des espaces de Riemann avec parallélisme de Levi-Civita par rapport à la géométrie euclidienne. En particulier les espaces non holonomes conformes normaux à trois dimensions sont caractérisés par la condition que la transformation conforme associée à un contour fermé infiniment petit partant d'un point A laisse invariant ce point, ainsi que toutes les directions qui en sont issues. On déduit facilement de là que les seuls groupes d'holonomie possibles des espaces conformes normaux à trois dimensions sont:

1° Le groupe conforme général à 10 paramètres;

2° Le sous-groupe invariant à 6 paramètres du groupe qui conserve une droite isotrope fixe; dans ce second cas l'équation qui donne les lignes de longueur nulle est réductible à la forme $dz^2 + 2dx\,dy + \mathrm{H}(x, z)\,dx^2 = 0$, et l'on a par une quadrature un invariant intégral linéaire absolu des équations différentielles des lignes qui jouent le rôle des droites isotropes.

Une autre catégorie importante d'espaces non holonomes est liée à la considération des géodésiques d'un espace à connexion affine. Les équations différentielles de ces géodésiques sont d'une forme particulière, à savoir, pour $n = 2$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{A} + \mathrm{B}\frac{dy}{dx} + \mathrm{C}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \mathrm{D}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3.$$

Cela posé, si on se donne *a priori* un système d'équations différentielles de cette forme, il existe une infinité de connexions projectives telles que l'espace projectif non holonome qu'elles définissent admette les courbes données pour géodésiques; mais, parmi toutes ces connexions projectives, il en est une privilégiée, dite normale[1]. Les espaces non holonomes projectifs normaux sont à un système différentiel donné de géodésiques ce que les espaces de Riemann sont à un ds^2 donné. Pour $n = 2$, ils sont caractérisés par la propriété que la transformation projective associée à un contour fermé infiniment petit partant d'un point A laisse invariant le point A, ainsi que toutes les droites issues

[1] E. CARTAN. *Sur les variétés à connexion projective* (Bull. Soc. math. de France, 52, 1924, p. 205-241).

de A. D'après cela, les seuls groupes d'holonomie possibles sont pour $n = 2$:

1. Le groupe projectif général à 8 paramètres;

2. Le sous-groupe invariant à 6 paramètres du groupe qui laisse invariant un point fixe; dans ce cas l'équation différentielle des géodésiques, au lieu d'être de la forme générale indiquée ci-dessus, est réductible à la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A(x, y) ;$$

mais on peut, sans faire la réduction, obtenir par une quadrature un multiplicateur de Jacobi de cette équation.

Je citerai enfin, comme dernier exemple, le cas des espaces réels de Weyl à trois dimensions, en supposant le ds^2 défini positif. Si le groupe d'holonomie n'est pas un sous-groupe du groupe des déplacements, il est, soit le groupe de toutes les similitudes (cas général), soit le groupe des déplacements et des similitudes qui laissent invariante une direction fixe; dans ce cas les deux formes, quadratique et linéaire, qui définissent l'espace, sont:

$$ds^2 = dz^2 + H(x, y, z)(dx^2 + dy^2) , \qquad \omega = -\frac{\partial \log H}{\partial z} dz .$$

VII

J'aborde une dernière question, extrêmement intéressante. On sait le rôle que joue la théorie des groupes comme principe de subordination dans les géométries (holonomes) à groupe fondamental. La géométrie élémentaire, par exemple, se subordonne à la géométrie projective en ce sens que les propriétés euclidiennes d'une figure sont tout simplement les propriétés projectives de la figure plus complète formée par la figure donnée et le cercle imaginaire de l'infini; la géométrie élémentaire est au fond un simple chapitre de la géométrie projective, et cela tient à ce que le groupe fondamental de la première est un sous-groupe du groupe fondamental de la seconde. Il convient d'insister sur ce fait que l'espace projectif peut être, d'une infinité de manières différentes, regardé comme un espace métrique, car on peut y distinguer n'importe quelle conique non dégénérée qui sera susceptible d'y jouer le rôle du cercle imaginaire de l'infini, ou encore n'importe quelle quadrique non dégénérée (et alors on aura un espace non euclidien ou cayleyen).

D'une manière générale tout espace holonome à groupe fondamental G peut être regardé comme un espace holonome à groupe fondamental G′ si G′ est un sous-groupe de G.

Existe-t-il quelque chose d'analogue pour les espaces non holonomes ? La réponse à cette question est facile et à peu près évidente:

Pour qu'un espace non holonome à groupe fondamental G *puisse être regardé comme un espace non holonome à groupe fondamental* G′, *il faut et il suffit que son groupe d'holonomie g soit* G′ *ou un sous-groupe de* G′.

En particulier un espace à connexion projective à trois dimensions ne peut qu'exceptionnellement être regardé comme un espace métrique; il faut et il suffit pour cela que son groupe d'holonomie laisse invariante soit une conique, auquel cas il sera en général un espace de H. Weyl, soit une quadrique.

Un espace de H. Weyl ne peut être regardé comme un espace de Riemann que si son groupe d'holonomie est le groupe des déplacements (sans homothétie) ou un de ses sous-groupes.

Sans vouloir multiplier les exemples, nous pouvons indiquer une application intéressante à la théorie de la relativité. Dans l'étude de l'Univers physique, on peut porter son attention sur le côté projectif (défini par les trajectoires d'un point matériel abandonné à lui-même), ou sur le côté conforme (défini par les lois de la propagation de la lumière, lesquelles dépendent simplement d'une équation différentielle quadratique $ds^2 = 0$). Plaçons-nous d'abord au premier point de vue. Une première hypothèse est que le système différentiel qui définit les trajectoires mécaniques est de la forme particulière signalée plus haut, c'est-à-dire qu'elles peuvent être regardées comme les géodésiques d'un espace à 4 dimensions à connexion projective. La loi de la gravitation dans le vide d'Einstein peut alors s'exprimer ainsi: le groupe d'holonomie de l'Univers mécanique, considéré comme espace non holonome projectif normal à 4 dimensions, laisse invariante une quadrique (1re forme de la loi d'Einstein), ou une hyperquadrique (2me forme de la loi, avec constante cosmologique). Cela revient à dire, dans l'un et l'autre cas, que l'Univers est métrique, et sa métrique se déduit de la seule connaissance des trajectoires.

Si l'on se place au second point de vue, la seule connaissance des lois de propagation de la lumière, supposées définies par une équation de Monge quadratique, permet d'attribuer à l'Univers une connexion conforme normale bien déterminée; la loi de la gravitation dans le vide d'Einstein peut alors s'exprimer ainsi: le groupe d'holonomie de l'Univers optique, considéré comme espace non holonome conforme normal à 4 dimensions, laisse invariante une hypersphère de rayon nul (1re forme de la loi d'Einstein), ou une hypersphère de rayon non nul (2me forme de la loi avec constante cosmologique). Cela revient à dire, dans l'un et l'autre cas, que l'Univers est métrique, et sa métrique se déduit de la seule connaissance de la loi de propagation de la lumière.

Ajoutons enfin que les deux métriques d'Univers déduites, l'une des trajectoires mécaniques, l'autre des lois de propagation de la lumière, coïncident.

VIII

Indiquons en terminant la relation qui existe entre la notion de groupe d'holonomie et la notion de classe d'un espace de Riemann. M. G. Ricci a désigné sous ce nom le plus petit entier k tel que l'espace de Riemann supposé à n dimensions puisse être réalisé par une variété convenablement choisie de l'espace euclidien à $n+k$ dimensions. M. J. A. Schouten a démontré que, dans certains cas très étendus, la classe était égale au nombre de paramètres dont dépend la position finale du corps de vecteurs issus d'un point A, transporté par parallélisme le long d'un contour fermé partant de A. Il est à peu près évident que ce nombre n'est autre que l'ordre du groupe γ qui indique comment le groupe d'holonomie g de l'espace de Riemann transforme entre elles les directions (ou les points à l'infini). Il y aurait lieu de reprendre cette question et de voir si le théorème de M. J. A. Schouten est général, ou du moins dans quels cas il est vrai.

Citons encore pour mémoire le problème général de l'isomorphisme, holoèdrique ou mériédrique, de deux espaces non holonomes à groupe fondamental donné [1].

Signalons aussi des généralisations possibles obtenues en considérant des espaces (non holonomes) *non ponctuels*, par exemple engendrés par des éléments au sens de S. Lie. C'est ainsi qu'on peut, étant donnée une équation différentielle arbitraire

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right),$$

attribuer au plan (x, y), supposé initialement privé de toute propriété géométrique, une connexion projective telle que les géodésiques correspondantes soient les courbes intégrales de l'équation donnée: seulement l'élément générateur du plan ainsi doué d'une connexion projective est, non pas le point (x, y), mais l'élément $\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$. On indiquerait facilement nombre d'autres problèmes d'analyse susceptibles d'être géométrisés d'une manière analogue et dans lesquels la théorie des groupes interviendrait aussi légitimement que dans les problèmes dont nous avons plus spécialement parlé.

Je ne puis enfin terminer sans signaler les remarquables recherches dans lesquelles M. H. Weyl a repris l'ancien problème philosophique de l'espace, traité autrefois par Helmholtz et Lie, pour l'adapter aux points de vue nouveaux introduits par la théorie de la relativité; la notion de groupe est, là encore, à la base même de l'énoncé du problème posé par M. H. Weyl. Mais je ne puis songer à entrer dans l'exposition, même sommaire, de cette importante question, qui exigerait à elle seule une conférence spéciale.

---

[1] Voir en particulier mon mémoire: *Les espaces à connexion conforme* (Ann. de la Soc. polon. de math., 1923, p. 171-221).